

Inhaltsverzeichnis

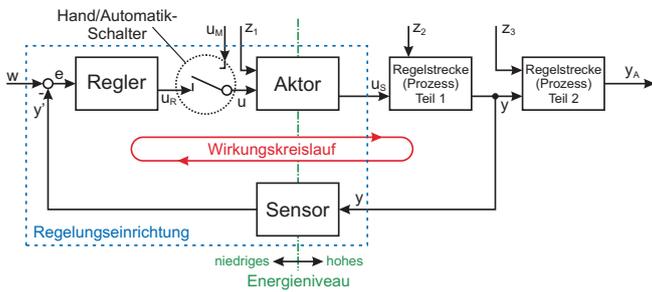
	6.7.1	Beispiel	6
I	1	Regelungssysteme 1	3
1		Grundelemente eines Regelkreises	3
2		Darstellungen von LTI-SISO-Systemen	3
2.1		Lineare DGL n-ter Ordnung	3
2.1.1		Transformation aus Zustandsraummodell	3
2.1.2		Transformation aus Übertragungsfunktion	3
2.2		Zustandsraummodell	3
2.2.1		Transformation aus DGL	3
2.2.2		Transformation aus Übertragungsfunktion	3
2.3		Übertragungsfunktion	3
2.3.1		Transformation aus DGL	3
2.3.2		Transformation aus Zustandsmatrix	3
2.4		Darstellungsformen von Zustandsraummodellen	3
2.4.1		Kanonische Normalform	3
2.4.2		Regelungsnormalform	4
2.4.3		Beobachtungsnormalform	4
3		Blockschaltbilder	4
3.1		Kreisstruktur	4
4		Zeitverhalten linearer dynamischer Systeme	4
4.1		Lösung eines linearen DGL-Systems	4
4.2		Anfangs- und Endwertsatz der Laplace-Transformation	4
4.2.1		Anfangswertsatz	4
4.2.2		Endwertsatz	4
4.3		Kennwerte der Übertragungsfunktion	5
5		Systemdynamische Bausteine	5
5.1		Totzeitsysteme	5
5.1.1		Rationale Approximationen	5
5.2		Minimalphasensysteme und Allpässe	5
5.2.1		Minimalphasensysteme (MP)	5
5.2.2		Nichtminimalphasensysteme (NMP)	5
5.2.3		Allpasssysteme (AP)	5
6		Stabilität	5
6.1		Zustandsstabilität	5
6.2		Routh-Hurwitz-Kriterium	5
6.2.1		Spezialfälle	5
6.3		Direkte Methode von Lyapunov	5
6.3.1		Spezialfall: lineare Systeme mit regulärer Systemmatrix A	5
6.4		Zustandssteuerbarkeit und Zustandsbeobachtbarkeit	6
6.4.1		Steuerbarkeitskriterium	6
6.4.2		Beobachtbarkeitskriterium	6
6.4.3		Einfluss von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit auf das E/A-Verhalten	6
6.5		BIBO(E/A)-Stabilität (äußere Stabilität)	6
6.5.1		E/A-Stabilitätsbedingungen	6
6.6		Stabilitätsgrad	6
6.7		Dominierendes Systemverhalten und Ordnungsreduktion	6
	7	Grundlagen der Regelung und Standardregler	7
	7.1	Standardstrecken	7
	7.1.1	Strecke vom globalen P-Typ	7
	7.1.2	Strecke vom globalen I-Typ	7
	7.2	Standardregler	7
	7.2.1	PID-Regler	7
	7.2.2	Vorhalt/Nacheil-Regler	7
	7.3	Stationäres Regelkreisverhalten	7
	8	Stabilitätsanalyse im Frequenzbereich	7
	8.1	Nyquist-Ortskurve	7
	8.1.1	Schwingbedingung in Regelkreisen	7
	8.1.2	Nyquist-Kriterium	7
	8.1.3	Linke-Hand-Regel	7
	8.2	Bodediagramme	7
	8.2.1	P -, I -, D -Bausteine	7
	8.2.2	PT_1 -Baustein	7
	8.2.3	PD -Baustein	8
	8.2.4	PT_2 -Baustein	8
	8.2.5	T_t -Baustein	8
	8.3	Kenngrößen der Frequenzgangfunktion $G_0(j\omega)$	8
	8.4	Phasenrand- / Amplitudenrandkriterium	9
	8.4.1	Phasenrandkriterium	9
	8.4.2	Amplitudenrandkriterium	9
	9	Reglerentwurf	9
	9.1	Heuristische Einstellmethoden	9
	9.1.1	Symmetrisches Optimum	9
	9.1.2	Einstellregeln nach Ziegler-Nichols	9
	9.2	Frequenzgangentwurfskriterien	9
	9.2.1	Entwurfsvorschriften für zufriedenstellendes Regelkreisverhalten	9
	9.2.2	Praktische Durchführung der Reglerentwurfsaufgabe	9
	9.3	Wurzelortskurven (WOK)	10
	9.3.1	Beispiel	10
	9.3.2	Wichtige Eigenschaften	10
	10	Strukturelle Erweiterungen der einschleifigen Regelungsstruktur	10
	10.1	Führungsgrößenaufschaltung/Vorsteuerung	10
	10.2	Störgrößenaufschaltung	10
	10.3	Kaskadenregelung	11
	11	Zustandsbasierter Reglerentwurf	11
	11.1	Zustandsregelung von LTI-SISO-Systemen	11
	11.1.1	P -Regler mit vollständiger linearer Zustandsrückführung	11
	11.1.2	Reglerentwurf durch Polverschiebung oder -zuweisung	11
	11.2	Zustandsbeobachter	11
	11.2.1	Parallelmethode	11
	11.2.2	Vollständiger Zustandsbeobachter	11
	11.3	Zustandsregelung unter Einschluss eines Beobachters	12
	11.3.1	Dynamischer Zustandsraum-Kompensator	12

12 Zeitdiskrete Realisierung zeitkontinuierlicher Regelungsgesetze und Modelle	12
12.1 Zustandsdarstellungen	12
12.2 Differenzgleichung n -ter Ordnung	12
12.3 Z -Übertragungsfunktion	12
12.3.1 Wichtige Eigenschaften	12
12.4 Zeitverhalten und Analyse zeitdiskreter LTI- Systeme	12
12.4.1 Allgemeine Lösungsformel zur Zu- standsform	12
12.4.2 Stabilität	12
12.5 Methoden der Zeitdiskretisierung von LTI- Systemen	12
12.5.1 Rechteck-Approximation	12
12.5.2 Trapez-Approximation	12
12.5.3 Sprunginvarianzmethode	12
12.6 Rekursiver Simulationsalgorithmus	13
12.7 Festlegung der Abtastfrequenz f_A in Regel- kreisen	13
12.7.1 Ermittlung von T_A anhand der Sprungantwort	13
12.7.2 Schutzfilter	13

Teil I

Regelungssysteme 1

1 Grundelemente eines Regelkreises



- Führungsgröße w : Sollvorgabe für die Aufgabengröße, die es durch den Regler einzuhalten gilt.
- Regeldifferenz e : Im Idealfall hält der Regler diese Größe stets bei Null; dies ist ein Hauptziel jeder Regelung.
- Stellgröße u_S : Eingang des zu regelnden Systems, im weiteren auch als Regelstrecke oder Prozess bezeichnet. Stellgrößen werden durch Aktoren erzeugt; sie bewirken auch die Signalwandlung von niedrigem auf hohes Energieniveau innerhalb der Regelschleife.
- Aktoreingang u : Eingangsgröße des Stellgliedes oder Aktors, die aus der Ausgangsgröße des Reglers u_R (Automatikbetrieb) bzw. eines manuellen Stellelementes u_M (manueller Betrieb) hervorgeht.
- Aufgabengröße y_A : Die eigentlich zu beeinflussende Größe.
- Regelgröße y : Die tatsächlich durch einen Sensor erfassbare Größe, die dem Regler zugeführt wird; y kann von y_A mehr oder weniger stark abweichen.
- Störgrößen z_i : Nicht vorhersehbare und nicht beeinflussbare Größen, die an den verschiedensten Punkten in der Regelschleife angreifen können.

2 Darstellungen von LTI-SISO-Systemen

2.1 Lineare DGL n-ter Ordnung

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_0 u$$

2.1.1 Transformation aus Zustandsraummodell

$$\text{Setze } \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Wenn alle x_n durch $y^{(n-1)}$ ersetzt worden sind, müssen nur noch alle Gleichungen ineinander eingesetzt werden, sodass nur noch eine DGL n -ter Ordnung übrig bleibt.

2.1.2 Transformation aus Übertragungsfunktion

Die DGL kann mittels inverser Laplace-Transformation der Übertragungsfunktion ermittelt werden.

2.2 Zustandsraummodell

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + \underline{b} u$$

$$y = \underline{c}^T \underline{x} + d u$$

2.2.1 Transformation aus DGL

Sei $a_n = 1$.

$$\text{Setze } \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{b_0} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Für $0 < m < n$ gilt:

$$y = [b_0, b_1, \dots, b_m, 0, \dots, 0] \underline{x}$$

Für $m = n$ gilt:

$$y = [b_0 - a_0 b_n, b_1 - a_1 b_n, \dots, b_{n-1} - a_{n-1} b_n] \underline{x} + b_n u$$

2.2.2 Transformation aus Übertragungsfunktion

Zuerst die Übertragungsfunktion mittels inverser Laplace-Transformation in eine DGL umwandeln und danach wie oben beschrieben vorgehen.

2.3 Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

2.3.1 Transformation aus DGL

Die Übertragungsfunktion kann mittels Laplace-Transformation der DGL ermittelt werden.

2.3.2 Transformation aus Zustandsmatrix

$$G(s) = \underline{c}^T (sI_n - A)^{-1} \underline{b} + d = \frac{\det \begin{bmatrix} sI_n - A & -\underline{b} \\ \underline{c}^T & d \end{bmatrix}}{\det(sI_n - A)}$$

2.4 Darstellungsformen von Zustandsraummodellen

2.4.1 Kanonische Normalform

$$\dot{\underline{x}}_k = \text{diag}(\lambda_i) \underline{x}_k + \underline{b}_k u$$

$$y = \underline{c}_k^T \underline{x}_k + d u$$

$$\text{diag}(\lambda_i) = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

mit $T = [v_1, v_2, \dots, v_n]$, $\underline{b}_k = T^{-1}b$, $\underline{c}_k^T = \underline{c}^T T$, $\underline{x}_k = T^{-1}x$
 λ_i : Eigenwerte von A
 v_i : Eigenvektoren von A

2.4.2 Regelungsnormalform

$$\begin{aligned} \dot{x}_R &= A_R x_R + \underline{b}_R u \\ y &= \underline{c}_R^T x_R + d \\ A_R &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \underline{b}_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ \underline{c}_R^T &= [b_0 - b_n a_0, b_1 - b_n a_1, \dots, b_{n-1} - b_n a_{n-1}] \\ d &= b_n \end{aligned}$$

Transformation eines beliebigen Systems in Regelungsnormalform:

1) Steuerbarkeitsmatrix aufstellen:

$$Q_c = [b, Ab, A^2 b, \dots, A^{n-1} b]$$

2) Letzte Zeile von Q_c^{-1} :

$$\underline{q}_c^T = [0, 0, \dots, 0, 1] Q_c^{-1}$$

3) Transformationsmatrix:

$$T_R = \begin{bmatrix} \underline{q}_c^T \\ \underline{q}_c^T A \\ \underline{q}_c^T A^2 \\ \vdots \\ \underline{q}_c^T A^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}$$

2.4.3 Beobachtungsnormalform

$$\begin{aligned} \dot{x}_B &= A_B x_B + \underline{b}_B u \\ y &= \underline{c}_B^T x_B + d \\ A_B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad \underline{b}_B = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} \\ \underline{c}_B^T &= [0, 0, \dots, 1] \\ d &= b \end{aligned}$$

Transformation eines beliebigen Systems in Beobachtungsnormalform:

1) Beobachtbarkeitsmatrix aufstellen:

$$Q_O = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T A \\ \underline{c}^T A^2 \\ \vdots \\ \underline{c}^T A^{n-1} \end{bmatrix}$$

2) Letzte Spalte von Q_O^{-1} :

$$\underline{q}_O = Q_O^{-1}[0, \dots, 0, 1]^T$$

3) Transformationsmatrix:

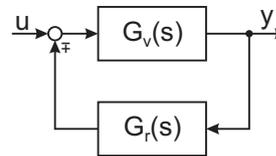
$$T_B = [\underline{q}_O, A \underline{q}_O, \dots, A^{n-1} \underline{q}_O]$$

Zusammenhang zwischen Regelungs- und Beobachtungsnormalform:

$$A_R = A_B^T, \quad \underline{b}_R = \underline{c}_B, \quad \underline{c}_R = \underline{b}_B$$

3 Blockschaltbilder

3.1 Kreisstruktur



$$G(s) = \frac{G_v(s)}{1 \pm G_v(s)G_r(s)}$$

4 Zeitverhalten linearer dynamischer Systeme

4.1 Lösung eines linearen DGL-Systems

Sei

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

dann lautet die Lösung:

$$x(t) = \underbrace{\Phi(t-t_0)x_0}_{\text{Eigenbewegung}} + \underbrace{\int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau}_{\text{Erzwungene Bewegung}}; \quad t \geq t_0$$

mit $\Phi(t) = e^{At}$.

4.2 Anfangs- und Endwertsatz der Laplace-Transformation

4.2.1 Anfangswertsatz

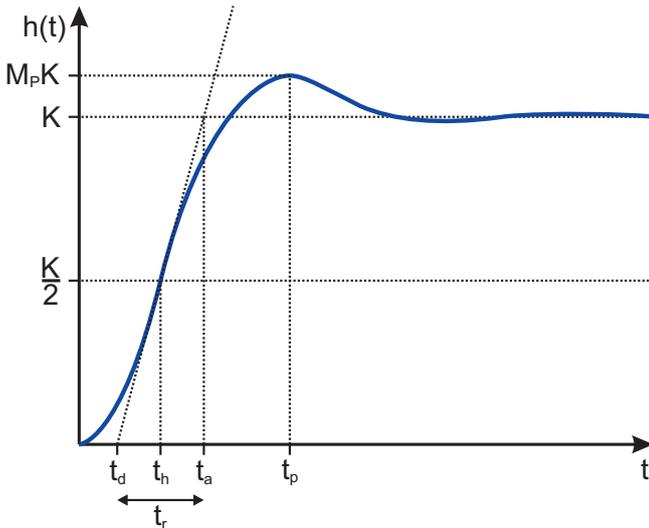
$$y(t \rightarrow 0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sG(s)U(s)]$$

4.2.2 Endwertsatz

$$y(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0^+} [sG(s)U(s)]$$

Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Grenzwertsätze ist, dass die Grenzwerte auf beiden Seiten existieren.

4.3 Kennwerte der Übertragungsfunktion



- K : Stationärer Endwert
- t_h : Zeitpunkt des halben Endwertes
- t_r : Anstiegszeit
- t_d : Verzugszeit
- t_a : Anregelzeit
- T_{ein} : Die kleinste Zeit, nach der $h(t)$ von Endwert K um maximal 5% abweicht.
- t_p : Zeitpunkt des maximalen Überschwingens

5 Systemdynamische Bausteine

5.1 Totzeitsysteme

$$y(t) = Ku(t - T_t) \circ \bullet G(s) = Ke^{-sT_t}$$

5.1.1 Rationale Approximationen

- Reihenentwicklung (PT_n -System)

$$e^{-sT_t} \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{sT_t}{n}\right)^n}, \quad n \geq 1$$

bzw. $e^{-sT_t} \approx \frac{1}{1 + sT_t}, \quad n = 1$

- Padé-Approximation

$$e^{-sT_t} \approx \frac{1 - \frac{sT_t}{2}}{1 + \frac{sT_t}{2}}$$

5.2 Minimalphasensysteme und Allpässe

5.2.1 Minimalphasensysteme (MP)

MP-Systeme haben keine Nullstellen oder/und Pole in der rechten Halbebene der Pol-/Nullstellenkarte, d.h.

$$Re\{q_\mu\} \leq 0, \quad Re\{p_\nu\} \leq 0 \quad \forall \mu, \nu$$

5.2.2 Nichtminimalphasensysteme (NMP)

NMP-Systeme sind Systeme, die mindestens eine Pol- oder Nullstelle in der rechten Halbebene haben und/oder totzeitbehaftet sind.

Jedes NMP-System kann in eine Serienschaltung aus MP- und AP-System aufgespalten werden.

Sowohl bei NMP- als auch bei AP-Systemen stellt sich anfänglich eine Umkehr des Wirkungsinns ein.

5.2.3 Allpasssysteme (AP)

AP-Systeme sind spezielle NMP-Systeme, deren Pol-/Nullstellenverteilung symmetrisch zur Imaginärachse der s -Ebene ist. AP-Systeme haben eine frequenzunabhängigen, konstanten Amplitudenverlauf $|G(j\omega)|$.

6 Stabilität

6.1 Zustandsstabilität

Ein System ist zustandsstabil, wenn gilt:

$$Re\{\lambda_i(A)\} < 0 \quad \forall i$$

6.2 Routh-Hurwitz-Kriterium

Gegeben sei das charakteristische Polynom (Nennerpolynom von $G(s)$):

$$N(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0$$

Ein System ist stabil, wenn gilt:

$$b_n > 0 \quad \forall n \quad \text{und alle } n \text{ Hurwitzdeterminanten } > 0$$

6.2.1 Spezialfälle

- $n = 1$: $b_1 > 0, b_0 > 0$
- $n = 2$: $b_2 > 0, b_1 > 0, b_0 > 0$
- $n = 3$: $b_3 > 0, b_2 > 0, (b_1 > 0), b_0 > 0, b_2 b_1 - b_0 b_3 > 0$
- $n = 4$: $b_4 > 0, b_3 > 0, (b_2 > 0), b_1 > 0, b_0 > 0,$
 $b_3 b_2 b_1 - b_0 b_3^2 - b_1^2 b_4 > 0$

6.3 Direkte Methode von Lyapunov

Nach Lyapunov ist der GGP \underline{x}^* einer DGL $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x})$ asymptotisch stabil, wenn eine Lyapunov-Funktion $V(\underline{x})$ gefunden werden kann mit den Eigenschaften:

- 1) $V(\underline{x}^*) = 0$
- 2) $V(\underline{x}) > 0$ für alle \underline{x}
- 3) $\frac{d}{dt} V(\underline{x}) < 0$ für alle Lösungen der DGL

6.3.1 Spezialfall: lineare Systeme mit regulärer Systemmatrix A

Falls $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$, lautet der Ansatz:

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^T P \underline{x}$$

Seien P und Q symmetrische, positiv definite Matrizen und gelte:

$$A^T P + P A = -Q$$

Vorgehensweise, um asymptotische Stabilität nachzuweisen:

- 1) Wähle Q als symmetrische, positiv definite Matrix (z.B. $Q = I_n$)
- 2) Einsetzen von allgemeinem symmetrischen Ansatz für P :

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots \\ p_2 & p_3 & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots \end{bmatrix}$$

- 3) • Falls P nicht positiv definit
 ⇒ System nicht asymptotisch stabil
 • Falls P positiv definit
 ⇒ System asymptotisch stabil

Eine symmetrische Matrix ist positiv definit, falls gilt:

$$\lambda_i > 0 \quad \forall i$$

6.4 Zustandssteuerbarkeit und Zustandsbeobachtbarkeit

6.4.1 Steuerbarkeitskriterium

Ein System $\dot{x} = Ax + Bu$ ist nur dann vollständig zustandssteuerbar, wenn gilt:

$$\text{Rang}(Q_c) = n$$

bzw. $\det(Q_c) \neq 0$ für SISO/SIMO-Systeme

mit der $n \times (n \cdot r)$ -Steuerbarkeitsmatrix

$$Q_c = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$$

Der Rang der Matrix Q_c entspricht der Anzahl der steuerbaren Zustände.

6.4.2 Beobachtbarkeitskriterium

Ein System $\dot{x} = Ax, y = Cx$ ist nur dann vollständig zustandsbeobachtbar, wenn gilt:

$$\text{Rang}(Q_o) = n$$

bzw. $\det(Q_o) \neq 0$ für SI/MISO-Systeme

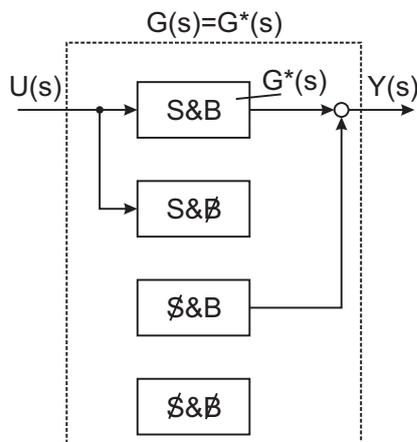
mit der $n \times (n \cdot q)$ -Beobachtbarkeitsmatrix

$$Q_o = [C^T, A^T C^T, \dots, (A^T)^{n-1} C^T]$$

Der Rang der Matrix Q_o entspricht der Anzahl der beobachtbaren Zustände.

6.4.3 Einfluss von Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit auf das E/A-Verhalten

Jedes SISO-LTI-System kann durch geeignete Transformation in 4 Subsysteme zerlegt werden:



Ein SISO-LTI-System hat nur dann eine nicht-reduzierbare E/A-Übertragungsfunktion $G(s)$, wenn das System vollständig steuerbar und beobachtbar ist.

Umgekehrt ist alleine aufgrund einer gegebenen - möglicherweise reduzierten - E/A-Übertragungsfunktion kein eindeutiger Schluss auf die Zustandsbeschreibung und die zugehörigen Eigenwerte möglich.

6.5 BIBO(E/A)-Stabilität (äußere Stabilität)

Bei E/A-stabilen Systemen gilt für die Pole der Übertragungsfunktion:

$$\text{Re}\{p_i\} < 0; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

6.5.1 E/A-Stabilitätsbedingungen

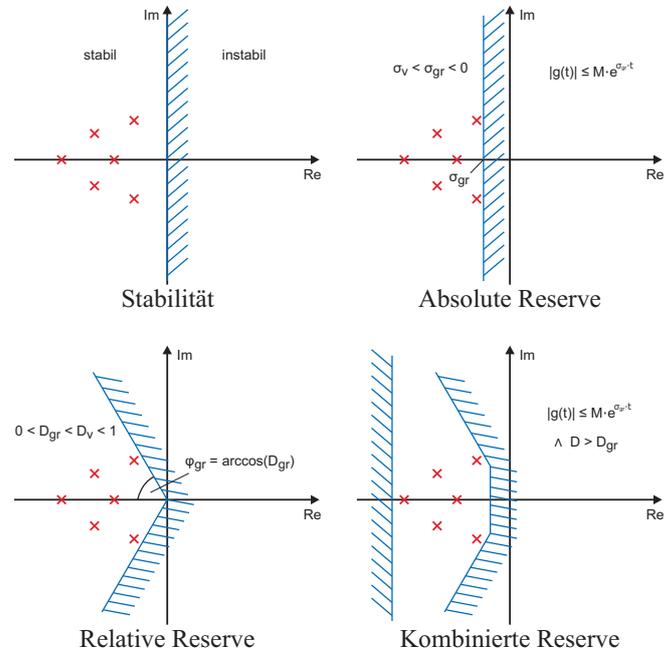
- Ist ein System vollständig steuerbar und beobachtbar und $\text{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0 \quad \forall i$, dann gilt:

asymptotisch stabil \Leftrightarrow E/A-stabil

- Ist ein System nicht vollständig steuerbar und/oder nicht vollständig beobachtbar, aber es gilt für alle steuerbaren und beobachtbaren Eigenwerte $\text{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0$, dann folgt:

asymptotisch stabil \Rightarrow E/A-stabil

6.6 Stabilitätsgrad



6.7 Dominierendes Systemverhalten und Ordnungsreduktion

Diejenigen Pole, die näher an der Imaginärachse liegen, dominieren das Systemverhalten.

Falls der Faktor mindestens 10 beträgt, kann der nicht dominierende Teil vernachlässigt werden.

Grenz- oder instabile Pole sind immer dominant und dürfen daher nie gestrichen werden!

Achtung:

Für die Reduktion muss $G(s)$ in Zeitkonstantenform umgeschrieben werden!

6.7.1 Beispiel

$$G(s) = \frac{2}{(1+s)(1+0,1s)} = \underbrace{\frac{2}{1+s}}_{\text{dom.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+0,1s}}_{\text{nicht dom.}} \approx \frac{2}{1+s}$$

7 Grundlagen der Regelung und Standardregler

7.1 Standardstrecken

7.1.1 Strecke vom globalen P-Typ

$$G(s) = K_s \cdot \frac{1 + \dots s + \dots s^2 + \dots}{1 + \dots s + \dots s^2 + \dots}$$

7.1.2 Strecke vom globalen I-Typ

$$G(s) = \frac{K_s}{s} \cdot \frac{1 + \dots s + \dots s^2 + \dots}{1 + \dots s + \dots s^2 + \dots}$$

7.2 Standardregler

7.2.1 PID-Regler

Da der PID-Regler nicht kausal und somit nicht realisierbar ist, wird in der Realität ein verzögerter PID-Regler verwendet:

$$G_R(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{1 + T s}$$

7.2.2 Vorhalt/Nachteil-Regler

$$G_R(s) = K_P \cdot \frac{1 + T_v s}{1 + T s}; \quad T_v, T > 0$$

$T_v > T$: Vorhalt-Regler (PDT_1)

$T_v < T$: Nachteil-Regler (PI -ähnlich)

7.3 Stationäres Regelkreisverhalten

Regler $G_R(s)$	Regelstrecke $G_S(s)$	Bleibende Regeldifferenz e_w für			
		$z_1 = 0, z_2 = 0$	$z_1 = 0, z_2 = 0$	$w = 0, z_2 = 0$	$w = 0, z_1 = 0$
P K_P	P-Typ		∞	$\frac{-K_S}{1+K_P K_S} \cdot z_0$	$\frac{-1}{1+K_P K_S} \cdot z_0$
I $\frac{K_I}{s}$	entsprechend	0	$\frac{1}{K_I K_S} \cdot w_0$	0	0
PI $K_P + \frac{K_I}{s}$	entsprechend	0	$\frac{1}{K_I K_S} \cdot w_0$	0	0
I_2 $\frac{K_I}{s^2}$	$K_S \frac{1+\dots}{1+\dots}$	0	0	0	0
P K_P	I-Typ	0	$\frac{1}{K_P K_S} \cdot w_0$	$\frac{-1}{K_P} \cdot z_0$	0
I $\frac{K_I}{s}$	entsprechend	0	0	0	0
PI $K_P + \frac{K_I}{s}$	$K_S \frac{1+\dots}{1+\dots}$	0	0	0	0

8 Stabilitätsanalyse im Frequenzbereich

8.1 Nyquist-Ortskurve

8.1.1 Schwingbedingung in Regelkreisen

Für die Übertragungsfunktion des aufgeschnittenen Regelkreises muss gelten:

$$G_0(j\omega) \stackrel{!}{=} -1$$

8.1.2 Nyquist-Kriterium

Ein geschlossener linearer Regelkreis ist dann stabil, wenn die Ortskurve des aufgeschnittenen Regelkreises $G_0(j\omega)$

- 1) nicht durch den kritischen Punkt $P_{krit} = -1 + 0j$ verläuft und

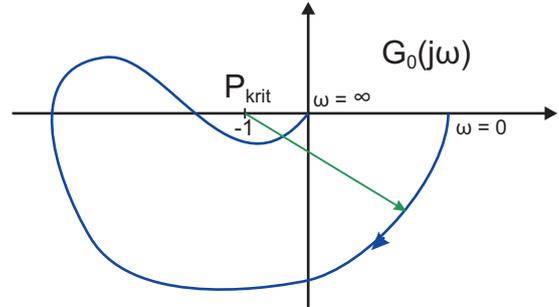
- 2) der von P_{krit} zum laufenden Ortskurvenpunkt $G_0(j\omega)$ weisende Vektor für wachsendes ω von $+0$ bis $+\infty$ eine globale Phasenwinkeländerung W von

$$W_{soll} = \Delta_{\omega=+0}^{\omega=+\infty} \Phi = n_r \cdot \pi + n_a \cdot \frac{\pi}{2}$$

erfährt.

n_r : Anzahl der Pole von $G_0(s)$ rechts von der Imaginärachse

n_a : Anzahl der Pole von $G_0(s)$ auf der Imaginärachse



8.1.3 Linke-Hand-Regel

Nur anwendbar, wenn $n_r = 0$ und $n_a \leq 1$.

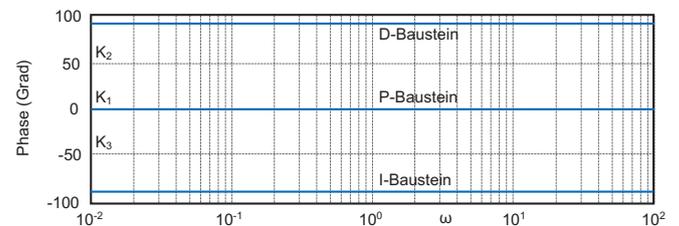
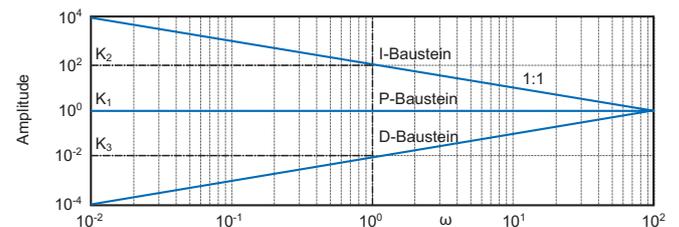
Die Linke-Hand-Regel lautet:

Der geschlossene Regelkreis ist stabil, wenn beim Entlangwandern auf der $G_0(j\omega)$ -Ortskurve von $\omega = 0$ nach $\omega = \infty$ der kritische Punkt P_{krit} beim Passieren des diesem am nächsten liegenden Ortskurvenabschnittes stets auf der linken Seite liegt.

8.2 Bodediagramme

8.2.1 P-, I-, D-Bausteine

$$G_P(j\omega) = K_1, \quad G_I(j\omega) = \frac{K_2}{j\omega}, \quad G_D(j\omega) = K_3 j\omega$$

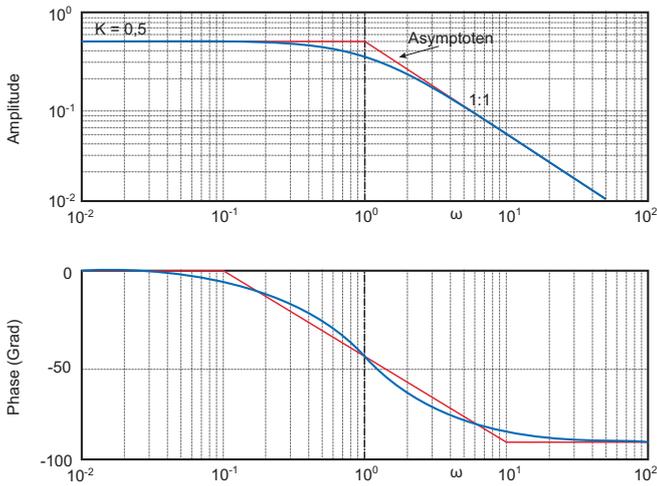


8.2.2 PT_1 -Baustein

$$G_{PT_1}(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}, \quad K, T > 0$$

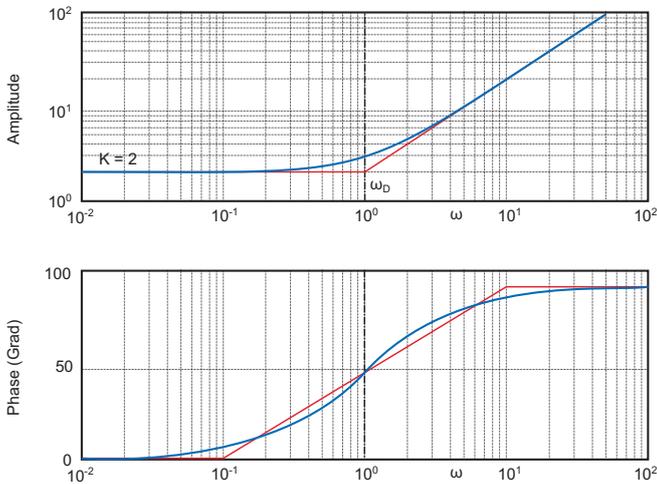
Die Eckfrequenz bzw. Bandbreite ω_E bezeichnet die Stelle, an der $G(s)$ auf $\frac{G(s)}{\sqrt{2}}$ gefallen ist. Es gilt außerdem:

$$\omega_E = \frac{1}{T}$$



8.2.3 PD-Baustein

$$G_{PD}(j\omega) = K \left(1 + j \frac{\omega}{\omega_D} \right), \quad \omega_D = \frac{1}{T_v}, \quad K, T_v > 0$$



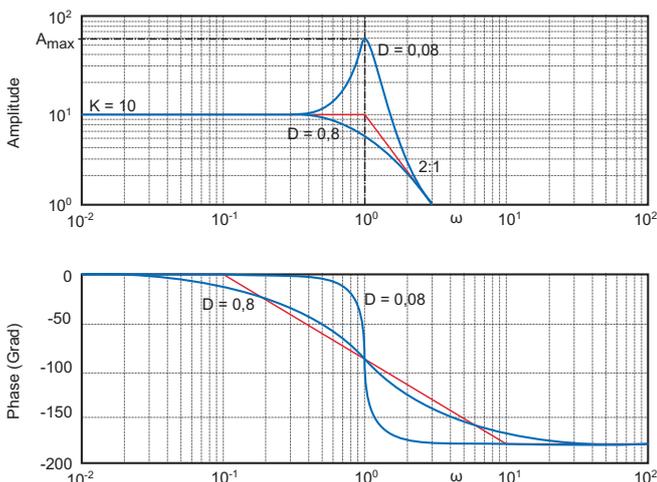
8.2.4 PT2-Baustein

$$G_{PT_2} = \frac{K}{1 + 2D \frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2}, \quad 0 < D < 1, K > 0$$

Für $0 < D < \frac{1}{\sqrt{2}}$ besteht die Fähigkeit zur Resonanz:

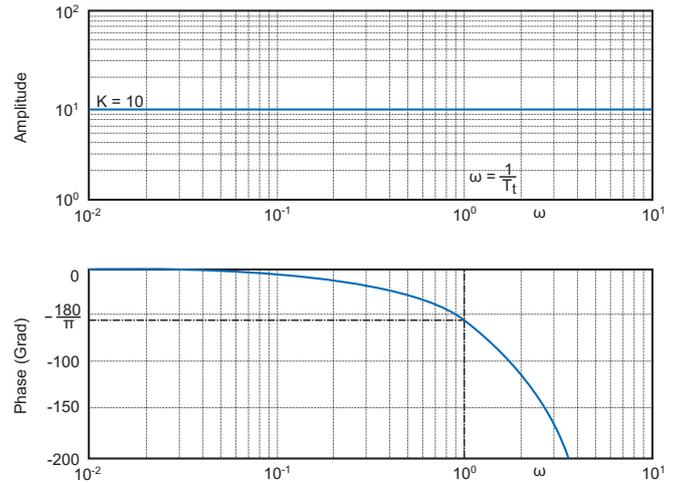
$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2}$$

mit $A_{\max} = A(\omega_r) = \frac{K}{2D\sqrt{1 - D^2}}$



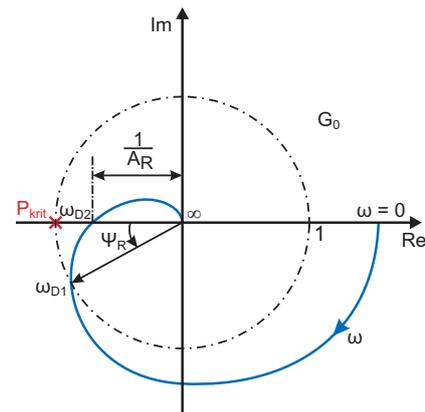
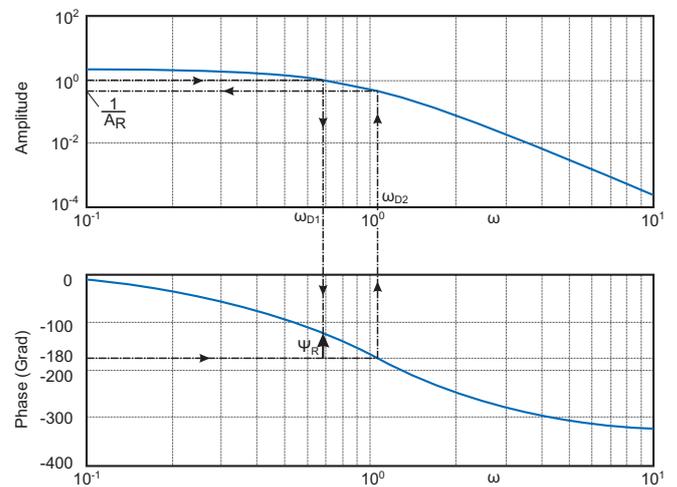
8.2.5 Tt-Baustein

$$G_{T_t}(j\omega) = K e^{-j\omega T_t}, \quad T_t > 0, K > 0$$



8.3 Kenngrößen der Frequenzgangfunktion G0(jω)

- Amplituden-Durchtrittsfrequenz ω_{D1} definiert durch $A(\omega_{D1}) = 1$
- Phasen-Durchtrittsfrequenz ω_{D2} definiert durch $\varphi(\omega_{D2}) = -\pi$
- Phasenrand / Phasenreserve Ψ_R definiert als $\Psi_R = \varphi(\omega_{D1}) + \pi$
- Amplitudenrand / Amplitudenreserve A_R definiert als $\frac{1}{A_R} = A(\omega_{D2})$



8.4 Phasenrand- / Amplitudenrandkriterium

Äquivalent zur Überprüfung der Stabilität des geschlossenen Regelkreises sind das Phasenrand- und das Amplitudenrandkriterium (des offenen Regelkreises). Voraussetzung für die Anwendbarkeit ist, dass $A(\omega_{D1}) = 1$ nur eine Lösung ω_{D1} und der offene Kreis keine Pole in der rechten Halbebene hat.

8.4.1 Phasenrandkriterium

Der geschlossene Regelkreis ist E/A-stabil, wenn gilt:

$$\Psi_R > 0$$

8.4.2 Amplitudenrandkriterium

Der geschlossene Regelkreis ist E/A-stabil, wenn gilt:

$$A_R > 1$$

9 Reglerentwurf

9.1 Heuristische Einstellmethoden

9.1.1 Symmetrisches Optimum

Typ der Regelstrecke	Reglertyp $G_R(s)$	Reglerparameter
P-Regelstrecke $\frac{K_S}{(1+sT_1) \prod_{\nu=2}^n (1+sT_\nu)}, T_1 > 4 \cdot \sum_{\nu=2}^n T_\nu$	PI-Regler $K_I \cdot \frac{1+s\tau}{s}$ oder $K_P + \frac{K_I}{s}, K_P = K_I \cdot \tau$	$\tau = 4 \cdot \sum_{\nu=2}^n T_\nu = 4 \cdot T_\Sigma$ $K_I = \left(2 \cdot K_S \cdot \frac{1}{T_1} \cdot \sum_{\nu=2}^n T_\nu \right)^{-1}$ $= \frac{T_1}{8K_S T_\Sigma^2}$
I-Regelstrecke $\frac{K_S}{sT_1 \cdot \prod_{\nu=2}^n (1+sT_\nu)}$		
P-Regelstrecke $\frac{K_S}{(1+sT_1) \cdot (1+sT_2) \cdot \prod_{\nu=3}^n (1+sT_\nu)}, T_1 > T_2 > 8 \cdot \sum_{\nu=3}^n T_\nu$	PID-Regler $K_I \cdot \frac{(1+s\tau_1)(1+s\tau_2)}{s}$	$\tau_1 = \tau_2 = 8 \cdot \sum_{\nu=3}^n T_\nu = 8 \cdot T_\Sigma$ $K_I = \left(2 \cdot K_S \cdot \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 \cdot T_2} \cdot \sum_{\nu=3}^n T_\nu \right)^{-1}$ $= \frac{T_1 \cdot T_2}{128K_S T_\Sigma^3}$
I-Regelstrecke $\frac{K_S}{sT_1 \cdot (1+sT_2) \cdot \prod_{\nu=3}^n (1+sT_\nu)}, T_2 > 8 \cdot \sum_{\nu=3}^n T_\nu$		

Eigenschaften:

- Beschleunigtes Einschwingverhalten
- Gutes stationäres Verhalten
- Kompromiss zwischen gutem Führungs- und Störverhalten
- Robustheit gegen Parameteränderungen
- Überschwingen kann durch einen PT_1 -Vorfilter leicht kompensiert werden

9.1.2 Einstellregeln nach Ziegler-Nichols

Voraussetzung:

Stabile Strecken mit globalem P-Verhalten und S-förmigem Verlauf der Sprungantwort.

Die zugrundegelegten Reglertypen sind P-, PI- oder PID-Regler der allgemeinen Form:

$$G_R(s) = K_R \left(1 + T_v s + \frac{1}{T_n s} \right)$$

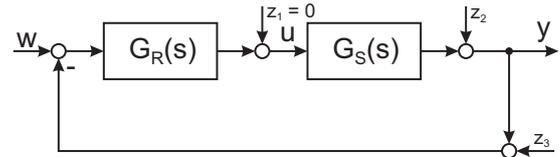
Zunächst müssen $K_{R,krit}$ und $T_{krit} = \frac{2\pi}{\omega_{krit}}$ aus der Nyquist-Ortskurve bestimmt werden, die die Schwingbedingung erfüllt:

$$K_{R,krit} \cdot \underbrace{G_S(j\omega_{krit})}_{\text{Regelstrecke}} \stackrel{!}{=} -1$$

Einstell-Regeln:

Reglertyp	K_R	T_n	T_v
P-Regler	$0,5 \cdot K_{R,krit}$	(∞)	(0)
PI-Regler	$0,45 \cdot K_{R,krit}$	$0,85 \cdot T_{krit}$	(0)
PID-Regler	$0,7 \cdot K_{R,krit}$	$0,4 \cdot T_{krit}$	$0,15 \cdot T_{krit}$

9.2 Frequenzgangentswerfkriterien



Für die Regelgröße y gilt:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}}_{G_w(s)} W(s) + \underbrace{\frac{1}{1+G_0(s)}}_{G_{z_2}(s)} Z_2(s) + \underbrace{\frac{-G_0}{1+G_0(s)}}_{G_{z_3}(s)} Z_3(s)$$

Für gutes Führungs- und Störungsübertragungsverhalten muss gelten:

$$G_w \stackrel{!}{\approx} 1, \quad G_{z_2} \stackrel{!}{\approx} 0, \quad G_{z_3} \stackrel{!}{\approx} 0$$

9.2.1 Entwurfsvorschriften für zufriedenstellendes Regelkreisverhalten

1) Stabilität:

$$\Psi_R > 0$$

2) Gutes stationäres Verhalten:

$$|G_0(j\omega)|_{\omega \ll \omega_{D1}} \gg 1$$

3) Gutes Einschwingverhalten:

Bandbreite: $\omega_B \approx \omega_{D1}$

Einschwingzeit: $T_{ein} \approx \frac{3}{\omega_{D1}}$

Geringes Überschwingen:

- $\Psi_R \approx 60^\circ \Leftrightarrow$ gutes Folgeverhalten
- $\Psi_R \approx 30^\circ \Leftrightarrow$ gutes Störverhalten

4) Reduktion des Einflusses von Messrauschen $z_3(t)$:

$$|G_0(j\omega)|_{\omega \gg \omega_{D1}} \ll 1$$

5) Robustheit gegen Modellierungsfehler:

→ meist mit Forderung 4 gut erfüllt

9.2.2 Praktische Durchführung der Reglerentwurfsaufgabe

Erfahrungswissen:

- Streckentyp und typische Führungs- und/oder Störsignale bestimmen die Grundstruktur des zu wählenden Reglers

- *P*-Anteil: Beeinflussung der Bandbreite und somit Einschwingzeit des Regelkreises
- *I*-Anteil: Beeinflussung der stationären Genauigkeit
- *D*-Anteil: Beeinflussung des Phasenrandes und damit des Dämpfungsgrades und des Überschwingens

9.3 Wurzelortskurven (WOK)

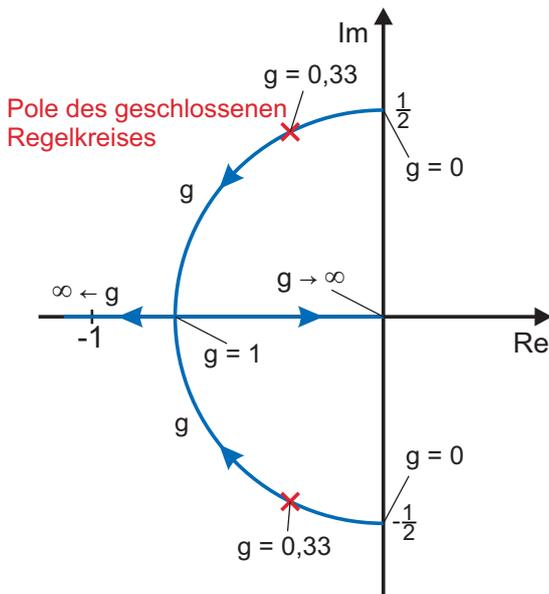
Die WOK beschreibt die "Wanderung" der Pole des geschlossenen Regelkreises G_{RK} in Abhängigkeit eines Parameters g .

Sei $G_0(s, g) = \frac{Z_0(s, g)}{N_0(s, g)}$ die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises, dann lautet das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises bzw. die Bestimmungsgleichung für die WOK wie folgt (falls Einheitsrückführung):

$$N_{RK}(s, g) = Z_0(s, g) + N_0(s, g) \stackrel{!}{=} 0$$

Hieraus können die Pole in Abhängigkeit von g berechnet werden.

9.3.1 Beispiel



9.3.2 Wichtige Eigenschaften

Falls für die offene Übertragungsfunktion

$$G_0(s, K) = K \cdot \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} = K \cdot Q \frac{\prod_{\mu=1}^m (s - q_\mu^0)}{\prod_{\nu=1}^n (s - p_\nu^0)}$$

gilt, wobei p_ν^0 und q_μ^0 die Pole und Nullstellen des offenen Regelkreises sind und K dem Parameter g entspricht, dann gelten folgende Eigenschaften für die Pole $p_v^{RK}(K)$ des geschlossenen Regelkreises:

- Die Pole $p^{RK}(g)$ liegen stets
 - entweder auf der reellen Achse
 - oder symmetrisch zur reellen Achse

- n WOK-Äste beginnen für $g = K = 0$ in den Polen p_ν^0
- m Äste enden für $K \rightarrow \infty$ in den Nullstellen q_μ^0 und die restlichen
- $n - m$ Äste enden für $g = K \rightarrow \infty$ im Unendlichen. Die Asymptoten dieser Äste schneiden sich im Wurzel-schwerpunkt p_w :

$$p_w = \frac{\sum_{\nu=1}^n p_\nu^0 - \sum_{\mu=1}^m q_\mu^0}{n - m}$$

- Die Asymptoten schließen mit der reellen Achse einen Winkel

$$\Phi_l = \frac{(2l - 1)\pi}{n - m} \quad \text{für } KQ > 0$$

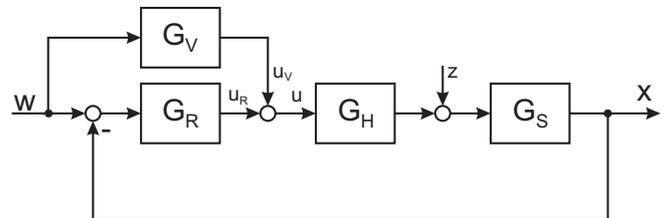
$$\Phi_l = \frac{(2l - 2)\pi}{n - m} \quad \text{für } KQ < 0$$

ein, wobei $l = 1, \dots, (n - m)$

- $KQ > 0 / (KQ < 0)$: Ein Punkt der reellen Achse ist genau dann Teil der Wurzelortskurve des geschlossenen Kreises, wenn die Anzahl der rechts von dem Punkt liegenden Pole und Nullstellen des offenen Kreises ungerade (gerade oder null) ist.

10 Strukturelle Erweiterungen der einschleifigen Regelungsstruktur

10.1 Führungsgrößenaufschaltung/Vorsteuerung



Wähle

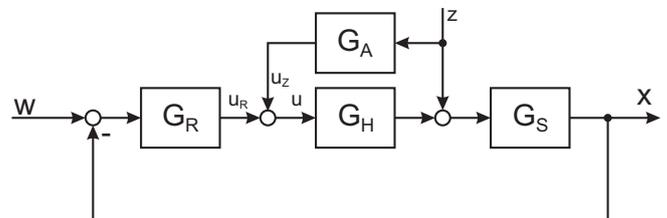
$$G_V(s) = \frac{1}{G_H(s)G_S(s)}$$

$$\Rightarrow G_w(s) = \frac{X(s)}{W(s)} = 1$$

Da dies allerdings i.d.R. nicht kausal und somit nicht realisierbar ist, wählt man meist als grobe Näherung eine statische Vorsteuerung mit

$$G_{V,stat}(s) = \frac{1}{G_H(0)G_S(0)} = \frac{1}{K_H K_S}$$

10.2 Störgrößenaufschaltung



Wähle

$$G_A(s) = -\frac{1}{G_H(s)}$$

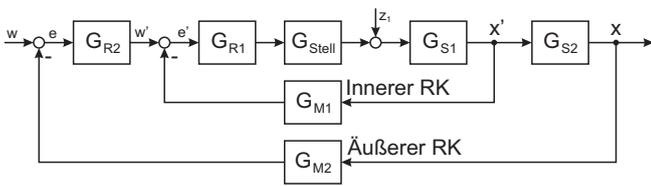
$$\Rightarrow G_z(s) = \frac{X(s)}{Z(s)} = 0$$

Da $G_A(s)$ i.d.R. nicht kausal ist, kann das Störverhalten nur stationär, aber nicht dynamisch verbessert werden:

$$G_{A,stat}(s) = -\frac{1}{G_H(0)} = -\frac{1}{K_H}$$

10.3 Kaskadenregelung

Kaskadenregelungen sind ineinander verschachtelte Regelkreise, deren dynamisches Verhalten von außen nach innen zumeist schneller wird.



Falls der innere Regelkreis deutlich schneller als der äußere reagiert, so gilt aus der Sicht des äußeren:

$$G'_w(s) = \frac{X'(s)}{W'(s)} \approx 1$$

11 Zustandsbasierter Reglerentwurf

11.1 Zustandsregelung von LTI-SISO-Systemen

11.1.1 P-Regler mit vollständiger linearer Zustandsrückführung

Das Regelgesetz lautet:

$$u = K_R (w' - \underline{k}^T \underline{x})$$

Mit $\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + \underline{b}u$, $y = \underline{c}^T \underline{x}$ folgt dann:

$$\dot{\underline{x}} = \underbrace{(A - \underline{b}\underline{k}^T K_R)}_{A_{Reg}} \underline{x} + \underline{b}K_R w'$$

Eigenwert- oder Polverschiebungssatz:

Die n Eigenwerte $\lambda_i(A)$ einer vollständig steuerbaren SISO-Strecke (A, \underline{b}) können mittels vollständiger linearer Zustandsregelung mit $\underline{k} \in \mathbb{R}^n$ zu beliebigen Regelungseigenwerten verschoben werden.

11.1.2 Reglerentwurf durch Polverschiebung oder -zuweisung

- 1) Ist (A, \underline{b}) vollständig steuerbar?
Wenn ja, dann nach 2); sonst ist keine vollst. EW-Verschiebung möglich
- 2) Wahl der Regelungspole p_ν mit gewünschten dynamischen Eigenschaften:

$$N_{Reg}^{soll}(s) = \prod_{\nu=1}^n (s - p_\nu)$$

3) Ist-Nennerpolynom bestimmen:

$$N_{Reg}^{ist}(s, \underline{k}) = \det(sI_n - A_{Reg}(\underline{k})) \quad \text{mit } A_{Reg} = A - \underline{b}\underline{k}^T$$

4) \underline{k} durch Koeffizientenvergleich bestimmen:

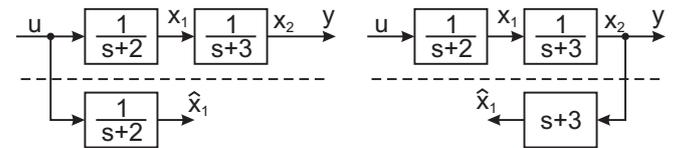
$$N_{Reg}^{soll} = N_{Reg}^{ist}$$

11.2 Zustandsbeobachter

Ein Zustandsbeobachter schätzt $\hat{\underline{x}}$, falls \underline{x} nicht vollständig direkt messbar ist.

11.2.1 Parallelmethode

$x_1(t)$ kann entweder aus $u(t)$ oder aus $y(t)$ bestimmt werden:



Die linke Methode ist hierbei weniger empfindlich gegenüber Messrauschen.

Deshalb wird die rechte Methode nur dann eingesetzt, wenn u nicht messbar oder das linke Teilsystem instabil ist.

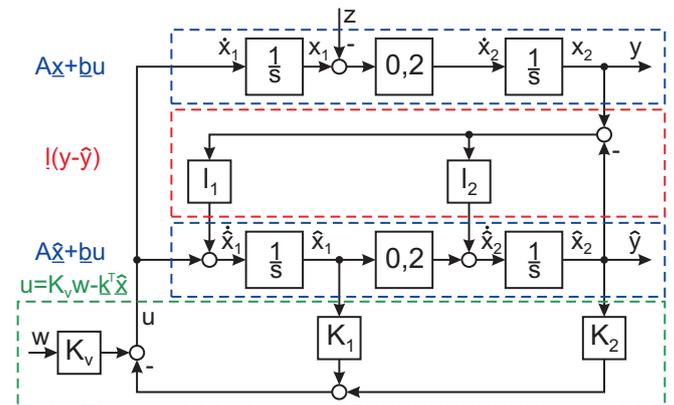
11.2.2 Vollständiger Zustandsbeobachter

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = \underbrace{(A - \underline{l}\underline{c}^T)}_{\hat{A}=A_{Beo}} \hat{\underline{x}} + \underline{b}u + \underline{l}y = \underbrace{\hat{A}\hat{\underline{x}} + \underline{b}u}_{\text{Prozessmodell}} + \underbrace{\underline{l}(y - \hat{y})}_{\text{Korrekturterm}}$$

$$\hat{y} = \underline{c}^T \hat{\underline{x}}$$

$$u = K_v w - \underline{k}^T \hat{\underline{x}}$$

Beispiel:



Eigenwert- oder Polverschiebungssatz für Beobachter:

Die n Eigenwerte $\lambda_i(A)$ eines vollständig beobachtbaren Prozessmodells (A, \underline{c}^T) können mit Hilfe des Beobachter-Rückführvektors $\underline{l} \in \mathbb{R}^n$ zu beliebigen Beobachtereigenwerten verschoben werden.

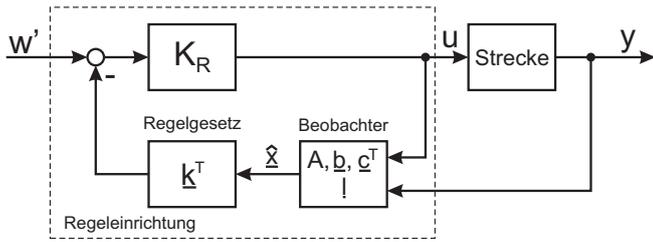
Faustregel zur Bestimmung von \underline{l} :

$$Re\{\lambda_i(\hat{A})\} \leq Re\{\lambda_i(A)\} \quad \forall i$$

Schätzfehler:

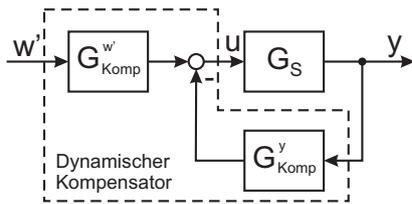
$$\tilde{\underline{x}} = \hat{\underline{x}} - \underline{x} \rightarrow \dot{\tilde{\underline{x}}} = \hat{A}\tilde{\underline{x}} - \underline{g}v$$

11.3 Zustandsregelung unter Einschluss eines Beobachters



11.3.1 Dynamischer Zustandsraum-Kompensator

= aus Zustandsregler und -beobachter zusammengesetzte Regeleinrichtung.



$$G_{Komp}^{w'}(s) = -\underline{k}^T (sI_n - A_{Komp})^{-1} \underline{b} + 1$$

$$G_{Komp}^y(s) = -\underline{k}^T (sI_n - A_{Komp})^{-1} \underline{l} = -\frac{\det \begin{bmatrix} (sI_n - A_{Komp}) & -\underline{l} \\ \underline{k}^T & 0 \end{bmatrix}}{\det[sI_n - A_{Komp}]}$$

mit $A_{Komp} = A - \underline{l}c^T - \underline{b}k^T$

12 Zeitdiskrete Realisierung zeitkontinuierlicher Regelungsgesetze und Modelle

12.1 Zustandsdarstellungen

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \underline{b}u_k$$

$$\underline{y}_k = \underline{c}^T \underline{x}_k + \underline{d}u_k$$

Erweiterte Standardform:

$$\underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + \underline{b}u_k + \underline{b}_1 u_{k+1}$$

12.2 Differenzgleichung n-ter Ordnung

$$a_n y_{k-n} + a_{n-1} y_{k-n+1} + \dots + a_0 y_k = b_m u_{k-m} + \dots + b_0 u_k$$

12.3 Z-Übertragungsfunktion

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

12.3.1 Wichtige Eigenschaften

- Linearität:

$$\mathcal{Z}\{x_k + y_k\} = X(z) + Y(z)$$

- Differenzensatz:

$$\mathcal{Z}\{x_{k+n}\} = z^n X(z) - z^n x_0 - z^{n-1} x_1 - \dots - z x_{n-1}$$

12.4 Zeitverhalten und Analyse zeitdiskreter LTI-Systeme

12.4.1 Allgemeine Lösungsformel zur Zustandsform

$$\underline{x}_k = A^k \underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1} \underline{b} u_j, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

12.4.2 Stabilität

System ist asymptotisch stabil, falls

$$|\lambda_i(A)| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

⇒ Stabilitätsgebiet ist Einheitskreisscheibe

Achtung:

Zur Berechnung der Eigenwerte muss $G(z)$ gegebenenfalls so erweitert werden, dass die niedrigste Potenz von z gleich 0 ist ($z^0 = 1$).

12.5 Methoden der Zeitdiskretisierung von LTI-Systemen

$$\dot{\underline{x}} = \tilde{A}\underline{x} + \tilde{B}\underline{u} \Rightarrow \underline{x}_{k+1} = A\underline{x}_k + B\underline{u}_k + B_1\underline{u}_{k+1}$$

$$y = \tilde{C}\underline{x} + \tilde{D}\underline{u} \Rightarrow \underline{y}_k = C\underline{x}_k + D\underline{u}_k$$

mit $\underline{x}_k = \underline{x}(t_k) = \underline{x}(kh)$.

12.5.1 Rechteck-Approximation

Hierbei wird die Integration durch ein Rechteck angenähert.

$$\Rightarrow s \hat{=} \frac{1 - z^{-1}}{h}$$

$$A = [I_n - \tilde{A}h]^{-1}$$

$$B = 0, \quad B_1 = [I_n - \tilde{A}h]^{-1} h \tilde{B}$$

$$C = \tilde{C}, \quad D = \tilde{D}$$

12.5.2 Trapez-Approximation

Hierbei wird die Integration durch ein Trapez angenähert.

$$\Rightarrow s \hat{=} \frac{2(z-1)}{h(z+1)}$$

$$A = \left[I_n - \tilde{A} \frac{h}{2} \right]^{-1} \left[I_n + \tilde{A} \frac{h}{2} \right]$$

$$B = B_1 = \left[I_n - \tilde{A} \frac{h}{2} \right]^{-1} \frac{h}{2} \tilde{B}$$

$$C = \tilde{C}, \quad D = \tilde{D}$$

12.5.3 Sprunginvarianzmethode

Hierbei wird die Eingangsgröße $\underline{u}(t)$ durch eine Stufenfunktion $\underline{u}(t_k)$ approximiert.

Berechnung im Zeitbereich:

$$A = e^{\tilde{A}h}$$

$$B = \int_0^h e^{\tilde{A}\eta} d\eta \tilde{B} = (e^{\tilde{A}h} - I_n) \tilde{A}^{-1} \tilde{B}$$

$$C = \tilde{C}, \quad D = \tilde{D}$$

Berechnung im Frequenzbereich:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{G(s)}{s} \right]$$

12.6 Rekursiver Simulationsalgorithmus

Gegeben sei:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

Transformiere wie folgt:

$$z^{-i} Y(z) \bullet \circ y_{k-i} \quad \forall i$$

$$z^{-i} W(z) \bullet \circ w_{k-i} \quad \forall i$$

und löse anschließend nach y_k auf.

12.7 Festlegung der Abtastfrequenz f_A in Regelkreisen

12.7.1 Ermittlung von T_A anhand der Sprungantwort

Es gelten folgende Faustformeln:

$$\begin{aligned} \omega_A &\approx 20\omega_g \\ 15\omega_B &\leq \omega_A \leq 50\omega_B \\ \omega_A &= \frac{2\pi}{T_A} \end{aligned}$$

Vorgehensweise zum Ermitteln von T_A aus $G(s)$:

1) Berechnen der Impulsantwort:

$$G(s) \bullet \circ g(t)$$

2) Berechnen der Sprungantwort:

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$$

3)

$$T' = \frac{h(t \rightarrow \infty)}{g(t=0)}$$

4) Siehe Diagramm:

Einschwingen des analog geschlossenen RK	$h = T_A = \frac{1}{f_A}$
<p>PT₁-ähnlich</p>	$\leq 0,4 \cdot T'$
<p>PT₂-ähnlich</p>	$\leq 0,1 \cdot T_e$
<p>S-förmig Wendetangenten-Verfahren</p>	$\leq 0,25 \cdot T'_i$

12.7.2 Schutzfilter

Durch die Filterung des Sensorsignales vor seiner Abtastung kann die Rückfaltung des Messrauschens deutlich reduziert werden.

- Butterworth-Filter 1. Ordnung → einfach

$$G_r(s) = \frac{0,5\omega_A}{s + 0,5\omega_A}$$

- Butterworth-Filter 2. Ordnung → steilere Flanke

$$G_r(s) = \frac{(0,5\omega_A)^2}{s^2 + \sqrt{2}(0,5\omega_A)s + (0,5\omega_A)^2}$$

Zur Berechnung des minimalen Dämpfungsfaktors der Messstörungen muss $|G_r(j\omega_{UG})|$ berechnet werden (ω_{UG} : untere Grenzfrequenz des Messrauschens).

Lizenz: CC BY-NC-SA 3.0

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/>