1 Wiederholung

1.1 Matrixnormen

Sei $||.||$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, dann definiert

$$|||A||| = \sup_{x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = \max_{||x||=1} ||Ax||$$

für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Norm.
Außerdem gilt:

1) Submultiplikativität
$$|||AB||| \leq |||A||| \cdot |||B|||$$
2) Verträglichkeit
$$||Ax|| \leq |||A||| \cdot ||x||$$

Die von der **Maximumsnorm** $||.||_\infty$ induzierte Matrizennorm ist die "maximale Zeilensumme".

$$||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Die von der l_1-**Norm** $||.||_1$ induzierte Matrizennorm ist die "maximale Spaltensumme":

$$||A||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Sei A eine symmetrische Matrix, dann gilt:

$$||A||_2 = |\lambda_{max}| = \{|\lambda| \; |\lambda \in \mathbb{R} \; ist \; Eigenwert \; von \; A\}$$

Für beliebige $\mathbb{R}^{n\times n}$-Matrizen gilt:

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \rho(A^T A)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(Spektralradius)}$$

Die Eigenwerte von A und A^{-1} sind zueinander invers.

$$\Rightarrow ||A^{-1}||_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}(A^T A)}}$$

1.2 Wichtige Reihen

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ..., \; x \in (-1, 1]$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

Für alternierende Reihen $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ mit $a_k \leq 0$ und monoton fallend (z.B. ln, sin, cos) gilt nach dem **Leibnizkriterium**:

$$\underbrace{\left| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k - \sum_{k_0}^{N} (-1)^k a_k \right|}_{\text{Restglied}} \leq a_{N+1}$$

Für die Exponentialreihe gilt:

$$\underbrace{\left| e^x - \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} \right|}_{\text{Restglied}} \leq 2 \cdot \frac{|x^{N+1}|}{(N+1)!} \quad \text{für } |x| \leq 1$$

2 Grundbegriffe der Numerik

2.1 Gleitkomma-Arithmetik

Es werden Zahlen der Form
$$a = (-1)^s \cdot m \cdot b^e$$
betrachtet, mit $b \in \mathbb{N}, b \geq 2, \; s \in \{0, 1\}$ und

$$m = \sum_{i=0}^{t-1} m_i b^{-i}; \quad m_i \in \{0, ..., b-1\}$$

$$e = \sum_{i=0}^{r-1} e_i b^i - \underbrace{(b^{r-1} - 1)}_{\text{bias}}; \quad e_i \in \{0, ..., b-1\}$$

wobei $t \geq 2$ und $r \geq 2$ die Genauigkeiten darstellen.

Nachfolgend sei $b = 2$.

IEEE "single":
32 Bit (s: 1 Bit, e: 8 Bit, m: 23 Bit)
IEEE "double":
64 Bit (s: 1 Bit, e: 11 Bit, m: 52 Bit)

Definitionen:

- $a \in \mathbb{R}$ heißt **normierte Gleitkommazahl** ($a \in \mathbb{M}_{t,r}^N$), falls eine Darstellung existiert mit $m_0 = 1$ und $e_{\min} < e < e_{\max}$, wobei gelte:
$$e_{\min} = -b^{r-1} + 1$$
$$e_{\max} = b^{r-1}$$
- $a \in \mathbb{R}$ heißt **subnormale Gleitkommazahl** ($a \in \mathbb{M}_{t,r}^S$), falls $e = e_{\min}$ und $m_0 = 0$, wobei nicht alle m_i Null sind.
$$\Rightarrow a = (-1)^s \left(\sum_{i=1}^{t-1} m_i 2^{-i} \right) 2^{e_{\min}+1}$$
- Sonderfälle
  - "0": $\forall i : m_i = 0, e_i = 0$
  - "∞": $\forall i : m_i = 0, e_i = 1$
  - "NaN": $\forall i : e_i = 1$, wobei nicht alle m_i Null sind.
- $\mathbb{M}_{t,r} = \mathbb{M}_{t,r}^N \cup \mathbb{M}_{t,r}^S \cup \{\pm\infty\} \cup \{NaN\}$
- Der Abstand von 1 zur nächstgrößeren Zahl in $\mathbb{M}_{t,r}$ ist:
$$\text{eps} = 2^{-(t-1)} \qquad \text{(Maschinengenauigkeit)}$$
- Rundung: $\text{rd}_{t,r} : \mathbb{R} \to \mathbb{M}_{t,r}^N$

Für die IEEE-754-Standardrundung gilt:

$$\frac{|x - \text{rd}_{t,r}|}{|x|} \leq \frac{\text{eps}_t}{2} \text{ für } x \neq 0$$

Für alle $x, y \in \mathbb{M}_{t,r}^N$ und $* \in \{+, -, \cdot, /\}$ gilt:

$$x \circledast y = \text{rd}_{t,r}(x * y)$$

2.2 Kondition

Seien x, y normierte Vektorräume (mit Norm $||.||$).
Ein Problem ist eine Funktion $f : x \to y$.
Gesucht ist $\delta f = f(x + \delta x) - f(x)$ im Vergleich zu δx.

Die **absolute Kondition** von f im Punkt $x \in X$ ist

$$\kappa_{\text{abs}}^f(x) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{||\delta x||<\delta} \frac{||\delta f||}{||\delta x||}$$

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar (mit $||.|| = |.|$), dann gilt:

$$\kappa_{\text{abs}}(x) = |f'(x)|$$

$$\Rightarrow ||\delta f|| \leq \kappa_{\text{abs}} \cdot ||\delta x||$$

Für die **relative Kondition** gilt:

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{||\delta x||<\delta} \frac{\frac{||\delta f||}{||f||}}{\frac{||\delta x||}{||x||}} = \lim_{\delta\to 0} \sup_{||\delta x||<\delta} \frac{||\delta f|| \cdot ||x||}{||f|| \cdot ||\delta x||}$$

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt:

$$\kappa_{\text{rel}} = \frac{|f'(x)|}{\frac{|f(x)|}{|x|}} = \frac{|f'(x)| \cdot |x|}{|f(x)|}$$

$$\Rightarrow \frac{||\delta f||}{||f||} \leq \kappa_{\text{rel}} \cdot \frac{||\delta x||}{||x||}$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, b \to f(b) = A^{-1}b = x$, dann gilt:

$$\kappa_{\text{abs}}(b) = ||f'(b)|| = ||A^{-1}||$$

$$\kappa_{\text{rel}}(b) = \frac{||A^{-1}||}{\frac{||A^{-1}b||}{||b||}} = ||A^{-1}|| \frac{||Ax||}{||x||} \leq ||A^{-1}|| \cdot ||A||$$

Für die Kondition bzgl. $||.||_2$ gilt außerdem:

$$\kappa_{\text{rel}}(A) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(A^T A)}{\lambda_{\min}(A^T A)}}$$

$\mathcal{N.B.}$:

$$\frac{||f(\tilde{x}) - f(x)||}{||f(x)||} \leq \kappa_{\text{rel}} \cdot \frac{||\tilde{x} - x||}{||x||} + O\left(\frac{||\tilde{x} - x||^2}{||x||^2}\right)$$

2.3 Stabilität

Definitionen:

- Ein **Algorithmus** ist eine Abb. $\tilde{f} : x \to y$ mit $\tilde{f} = \tilde{f}_k \circ ... \circ \tilde{f}_1$, wobei jeder Teilschritt $\tilde{f}_i, i = 1, ..., k$ nur Operationen aus $\{\oplus, \ominus, \odot, \oslash, \text{rd}\}$ enthält.
- Ein Algorithmus $\tilde{f}$ für ein Problem f heißt **rückwärtsstabil**, falls $\forall x \in X \; \exists \; \tilde{x} \in X$ mit
$$\underbrace{\tilde{f}(x)}_{(1+\epsilon)f(x)} = f(\tilde{x}) \text{ und } \frac{||x - \tilde{x}||}{||x||} = O(\epsilon) \text{ für } \epsilon \to 0$$
wobei ϵ den relativen Fehler darstellt.

Ziel:
Finde zu geg. f ein $\tilde{f}$, sodass der Fehler $||\tilde{f}(x) - f(x)||$ bzw. $\frac{||\tilde{f}(x)-f(x)||}{||f(x)||}$ möglichst "klein" ist.

Sei $\tilde{f}$ ein rückwärtsstabiler Algorithmus für f, dann gilt:

$$\frac{||\tilde{f}(x) - f(x)||}{||f(x)||} \leq O(\kappa_{\text{rel}}(x) \cdot \text{eps}) \text{ für eps} \to 0$$

3 Numerische lineare Algebra

3.1 Dreiecksmatrizen

Satz:
Falls $A = LR$ mit $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ untere und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obere Dreiecksmatrix, $det(A) \neq 0$, so ist das LGS $Ax = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^n$ in $2n^2$ Operationen lösbar.

$\mathcal{N.B.}$

$$\sum_{k=1}^{n} (ak - b) = \frac{1}{2} n(an + a - 2b)$$

3.1.1 *Vorwärts- / Rückwärtssubstitution*

Falls A obere oder untere Dreiecksmatrix, so kann das LGS $Ax = b$ durch Vorwärts- bzw. Rückwärtssubstitution gelöst werden.

Matlab-Code für Vorwärtssubstitution:

```
for j = 1 : n
    x(j) = (b(j) − A(j, 1 : j − 1) ∗ x(1 : j − 1))/A(j, j);
end
```

Matlab-Code für Rückwärtssubstitution:

```
for j = n : −1 : 1
    x(j) = (b(j) − A(j, j + 1 : n) ∗ x(j + 1 : n))/A(j, j);
end
```

Aufwand: je n^2 Flops

3.2 Nachiteration

Mit Hilfe der Nachiteration kann eine Näherungslösung $\tilde{x}$ eines LGS $Ax = b$ genauer approximiert werden.

Vorgehensweise:

1) Berechne $\tilde{x}$:
$$A\tilde{x} = b$$
2) Berechne r:
$$r = b - A\tilde{x}$$
3) Berechne z:
$$Az = r$$
4) Die genauere Näherungslösung $\hat{x}$ lautet:
$$\hat{x} = \tilde{x} + z$$

3.3 LR/LU-Zerlegung

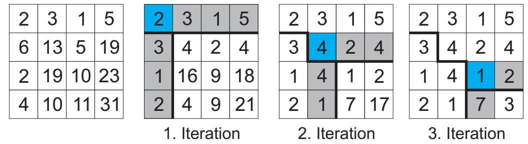
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, det(A) \neq 0, a_{ii} \neq 0, L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ untere und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obere Dreiecksmatrix.
Dann kann das LGS $Ax = b$ wie folgt gelöst werden:

1) Berechne L und R, sodass $A = LR$
2) Berechne y, sodass $Ly = b$ (für LRP-Zerlegung: $Ly = Pb$)
3) Berechne x, sodass $Rx = y$

Für die Berechnung von L und R wird folgender Algorithmus angewendet:

1) Setze $l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$ für $i \geq 1$.
2) Setze $a_{ij} = a_{ij} - l_{i1} \cdot a_{1j}$ für alle j und $i > 1$:
$$\text{Zeile } i = \text{Zeile } i - l_{i1} \cdot \; \text{Zeile } 1, \quad i > 1$$
3) Gehe zu Schritt 1 und ersetze alle 1er durch 2,3,4,...

Beispiel:



$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{R}$$

Aufwand für Zerlegung: $\frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n$ Flops

Das oben genannte Verfahren ist ein direktes/exaktes Lösungsverfahren (keine Verfahrensfehler; nur Rundungsfehler)

Matlab-Code:

```
[n,∼] = size(A);
for k = 1:n
    I = k+1:n;
    A(I,k) = A(I,k)/A(k,k);
    A(I,I) = A(I,I) - A(I,k)*A(k,I);
end
```

3.4 LRP/LUP-Zerlegung

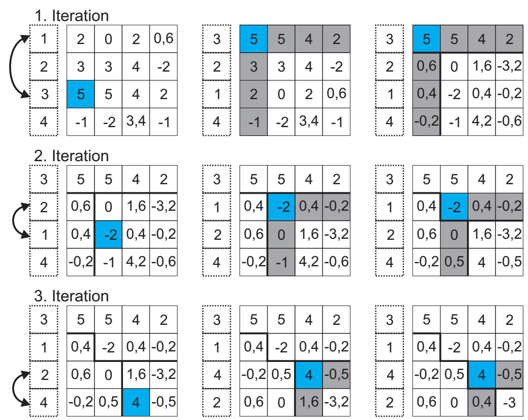
Die LRP-Zerlegung ist eine LU-Zerlegung mit Pivoting-Strategie:
Suche $j \geq k$, sodass $|a_{jk}^{(k)}| \geq |a_{ik}^{k}| \;\; \forall \, i \geq k$ und vertausche die j-te mit der k-ten Zeile in $A^{(k)}$.

Für $det(A) \neq 0$ existiert eine Permutationsmatrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass gilt:

$$PA = LR$$

Definition:
Eine Matrix heißt **Permutationsmatrix**, falls sie in jeder Zeile und jeder Spalte jeweils eine 1 enthält und sonst nur 0.

Beispiel:



$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0,6 \\ 3 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & 5 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 3,4 & -1 \end{pmatrix}}_{A}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 1 & 0 & 0 \\ -0,2 & 0,5 & 1 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0,4 & -0,2 \\ 0 & 0 & 4 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{R}$$

Matlab-Code:

```
[n,∼] = size(A);
p = 1:n;
for k = 1:n
    [∼,j] = max(abs(A(p(k:n),k)));
    j = j + (k-1);
    p([k,j]) = p([j,k]);
    I = k+1:n;
    A(p(I),k) = A(p(I),k)/A(p(k),k);
    A(p(I),I) = A(p(I),I) - A(p(I),k)*A(p(k),I);
end
```

3.5 Cholesky-Zerlegung

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit, dann existiert eine rechte obere Dreiecksmatrix R mit

$$A = R^T R$$

3.5.1 *Rekursiver Algorithmus zur Berechnung von R:*

1) Ersetze a_{11} durch $\sqrt{a_{11}}$
2) Ersetze alle Einträge unter a_{11} durch 0
3) Ersetze alle Einträge rechts von a_{11} durch $\frac{a_{1i}}{a_{11}}$
4) Beende die Funktion, falls $n == 1$
5) Um den inneren Teil der Matrix zu berechnen ($A(2 : n, 2 : n)$), rufe die Funktion mit folgender Matrix auf:
$$A(2 : n, 2 : n) - A(1, 2 : n)^T \cdot A(1, 2 : n)$$

Die entstandene Matrix stellt dann R dar.

Aufwand für Zerlegung: $\frac{1}{3}n^3$ Flops

3.6 Householder-Spiegelung

Die Spiegelung $\tilde{x}$ von $x \in \mathbb{R}^k$ an der Hyperebene E_V senkrecht zu $v \in \mathbb{R}^k$ heißt Householder-Spiegelung. Es gilt:

$$\tilde{x} = \underbrace{\left(I_n - \frac{2vv^T}{||v||^2}\right)}_{H_v \in \mathbb{R}^{m\times m}} \cdot x$$

Sei $v \neq 0$, dann gilt:

- $H_v^T = H_v, H_v H_v = I \Rightarrow H_v$ orthogonal
- $H_{\alpha v} = H_v \; \forall \; \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
- $H_v a = \mp||a||e_1$, falls $v = a \pm ||a||e_1$

3.7 QR-Zerlegung

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m \geq n, \; Rang(A) = n, Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ orthogonale Matrix, $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ rechte obere Dreiecksmatrix mit

$$A = QR$$

3.7.1 *QR-Algorithmus*

Achtung: Falls ein LGS $Ax = b$ gelöst werden soll, dann muss b genauso wie A transformiert werden.

Vorab: Setze $A^{(1)} = A, p = min\{m - 1, n\}$ und $k = 1$.

1) Setze $\tilde{A} = A^{(k)}(k : m, k : n)$ und $a = 1$. Spalte von $\tilde{A}$
2) Berechne $v = a + sign(a_1) \cdot ||a|| \cdot e_1 \in \mathbb{R}^{m-k+1}$
3) Berechne Update von $\tilde{A}$:
$$\tilde{A} \leftarrow \underbrace{\left(I - \frac{2vv^T}{||v||^2}\right)}_{H_v} \cdot \tilde{A} = \underbrace{\tilde{A} - \frac{2v}{||v||^2} \cdot (v^T \cdot \tilde{A})}_{\text{so in Matlab}}$$
4) Setze $Q_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & H_v \end{pmatrix}$ (falls Q explizit berechnet werden soll)
5) Setze $A^{(k+1)} = Q_k \cdot A^{(k)}$
(ersetze $\tilde{A}$ in $A^{(k)}$ mit Update aus 3.)
6) Erhöhe k und gehe zu Schritt 1

$$\Rightarrow R = A^{(p+1)} = Q^T A$$

$$Q = Q_1 \cdot ... \cdot Q_p, \; Q^T = Q_p \cdot ... \cdot Q_1, \; \text{ da } Q_k = Q_k^T$$

Falls $m = n$, so ist das **LGS** $Ax = b$ wie folgt lösbar:

$$\underbrace{Q^T A}_{R=A^{(p+1)}} \cdot x = \underbrace{Q^T b}_{b^{(p+1)}}$$

$$\Rightarrow Rx = b^{(p+1)}$$

Aufwand für Zerlegung:

$\frac{4}{3}n^3$ Flops, falls $m = n$
$2n^2\left(m - \frac{1}{3}n\right)$ Flops, falls $m >> n$

Matlab-Code (QR_householder):

```
function A = QR_householder(A)
[m,n] = size(A);
for k = 1:min(m-1,n)
    v = A(k:end,k);
    na = norm(v);
    if v(1) >= 0
      s = 1;
    else
      s = -1;
    end
    v(1) = v(1) + s*na;
    v = [1; v(2:end)/v(1)];
    A(k:end,k+1:end) = A(k:end,k+1:end) - (2/(v'*v)*v)*(v'*A(k:end,k+1:end));
    A(k,k) = -s*na;
    A(k+1:end,k) = v(2:end);
end
```

Matlab-Code (Qmult_householder):

```
function B = Qmult_householder(A,B)
[m,n] = size(A);
for k = 1:min(m-1,n)
    v = [1; A(k+1:end,k)];
    B(k:end,:) = B(k:end,:) - (2/(v'*v)*v)*(v'*B(k:end,:));
end
```

Matlab-Code (LGS $Ax = b$ lösen):

```
A = QR_householder(A);
x = rsub(triu(A), Qmult_householder(A,b));
```

4 Ausgleichsprobleme

Seien Messpunkte $t_i, b_i \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, i = 1, ..., m$ gegeben.
Ziel: Bestimme die n Parameter x_1 bis x_n, sodass gilt:

$$b_i \approx \varphi(t_i, x), \quad i = 1, ..., m$$

Falls φ linear in x ist, so ist x die Lösung eines überbestimmten GLS:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} = b \approx Ax = \begin{pmatrix} a(t_1)^T \\ . \\ . \\ . \\ a(t_m)^T \end{pmatrix} x$$

4.1 Lineares Ausgleichsproblem

Bestimme $x \in \mathbb{R}^n$ zu $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$, sodass gilt:

$$||b - Ax||_2^2 = min$$

4.2 Lösen mit Normalengleichung

$$A^T Ax = A^T b$$

Für ein Polynom $b = f(t) = x_0 + x_1 t + ... + x_n t^n$ als Ausgleichskurve gilt:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 & \dots & t_1^n \\ 1 & t_2 & t_2^2 & \dots & t_2^n \\ . & . & . & \ddots & . \\ 1 & t_m & t_m^2 & \dots & t_m^n \end{pmatrix}$$

4.3 Lösen mit QR-Zerlegung

Sei eine QR-Zerlegung gegeben mit

$$Q^T b = b^{(p+1)} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \qquad R = Q^T A = A^{(p+1)} = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}, b_1 \in \mathbb{R}^n, b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$.

Dann gilt für das Minimierungsproblem:

$$||b - Ax||^2 = ||Q^T(b - Ax)||^2 = ||Q^T b - Q^T \underbrace{QR}_{A} x||^2$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix} x \right\|^2 = ||b_1 - \tilde{R}x||^2 + ||b_2||^2$$

Somit folgt

$$||b_1 - \tilde{R}x||^2 + ||b_2||^2 = min \Leftrightarrow \tilde{R}x = b_1$$

5 Fixpunktiteration

Ziel: Gesucht wird ein Fixpunkt $x^* \in X$ der Abbildung $\varphi : X \to X$:

$$\varphi(x^*) = x^*$$

- Ein FP x^* heißt stabil, falls $||\varphi'(x^*)|| < 1$
- Ein FP x^* heißt instabil/abstoßend, falls $||\varphi'(x^*)|| > 1$

5.1 Kontraktion

Eine (Selbst-)Abbildung $\varphi : X \to X$ heißt Kontraktion, falls es ein festes $0 \le L < 1$ gibt mit:

$$||\varphi(x) - \varphi(y)|| \le L \cdot ||x - y||, \quad \forall\, x, y \in X \quad \text{(Lipschitz-stetig)}$$

Ist $\varphi : X \to X$ stetig differenzierbar, so gilt:

$$L = \sup_{x \in X} ||\varphi'(x)|| = \sup_{x \in X} ||J_\varphi(x)||$$

5.2 Banach'scher Fixpunktsatz

Sei X abgeschlossen und $\varphi : X \to X$ (Selbstabbildung) eine Kontraktion. Dann besitzt φ einen eindeutigen Fixpunkt $x^* \in X$ und die Iteration

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in X$ gegen x^*.
Außerdem gelten folgende Abschätzungen:

$$\underbrace{|x_n - x^*| \le \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|}_{\text{A-Priori}} \quad \text{und} \quad \underbrace{|x_n - x^*| \le \frac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}|}_{\text{A-Posteriori}}$$

5.3 Konvergenzgeschwindigkeit

Die Konvergenz der Folge (x_k) ist von der Ordnung p, wenn gilt:

$$||x_{k+1} - x^*|| \le C||x_k - x^*||^p \quad \forall\, k = 0, 1, ...$$

Falls $\varphi : X \to X$ zweimal stetig diffbar ist mit FP x^* und $\varphi'(x^*) = 0$, dann konvergiert die Iteration $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ mindestens lokal quadratisch.

6 Iterative Löser für LGS

6.1 Stationäre Fixpunktiteration

Idee: Zerlege A additiv in $A = B - C$ mit $det(B) \ne 0$, dann gilt:

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx = b + Cx$$

$$\Leftrightarrow x = B^{-1}b + B^{-1}Cx = \varphi(x)$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)} = \varphi\left(x^{(k)}\right) = B^{-1}b + B^{-1}Cx^{(k)}$$

$$= x^{(k)} + B^{-1}\left(b - Ax^{(k)}\right)$$

$$\varphi(x) = Nb + Mx^{(k)}$$

Sei $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist $||M|| < 1$ für eine Operatornorm $||.||$ hinreichend für die Konvergenz des Iteration $\varphi(x) = Nb + Mx$.

6.1.1 Dämpfung

Durch Dämpfung der FP-Iteration mit $\omega \in (0, 1]$ können die verschiedenen Verfahren noch beschleunigt werden:

$$x^{(k+1)} = \omega \cdot \left(Nb + Mx^{(k)}\right) + (1 - \omega) \cdot x^{(k)}$$

$$= \omega \cdot Nb + [\omega \cdot M + (1 - \omega) \cdot I] \cdot x^{(k)}$$

Falls $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nur reelle Eigenwerte $\lambda_1 \le ... \le \lambda_n < 1$ besitzt, dann gilt

$$\omega_{opt} = \frac{2}{2 - \lambda_1 - \lambda_n}$$

6.2 Jacobi-Verfahren

Zerlege A additiv in eine Diagonalmatrix D und obere/untere Dreiecksmatrizen R und L:

$$A = D - (L + R)$$

Dann lautet das Jacobi-Verfahren:

$$x^{(k+1)} = \underbrace{D^{-1}}_{N} b + \underbrace{D^{-1}(L + R)}_{M} \cdot x^{(k)} = D^{-1} \cdot \left[b + (L + R) \cdot x^{(k)}\right]$$

6.2.1 Konvergenz

Das Jacobi-Verfahren konvergiert, falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- A ist strikt diagonaldominant:
$$|a_{ii}| > \sum_{i \ne j} |a_{ij}|, \quad \forall\, i = 1, ..., n$$
- Für den Spektralradius gilt:
$$\rho\left(D^{-1}(L + R)\right) = \rho(M) = max\{\lambda_i(M) | i = 1, ..., n\} < 1$$

6.3 Gauß-Seidel-Verfahren

Zerlege A additiv in eine Diagonalmatrix D und obere/untere Dreiecsmatrizen R und L:

$$A = (D - L) - R$$

Dann lautet das Gauß-Seidel-Verfahren:

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(D - L)^{-1}}_{N} b + \underbrace{(D - L)^{-1} R}_{M} \cdot x^{(k)} = (D - L)^{-1} \cdot \left(b + Rx^{(k)}\right)$$

Aufwand: $2n^2$ Flops

6.3.1 Konvergenz

Das Gauß-Seidel-Verfahren konvergiert, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- A ist strikt diagonaldominant
- A ist symmetrisch und positiv definit
- Für den Spektralradius gilt:
$$\rho\left((D - L)^{-1}R\right) = \rho(M) = max\{\lambda_i(M) | i = 1, ..., n\} < 1$$

7 Nichtlineare Gleichungen

7.1 Lösbarkeit

Sei $f : X \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $x^* \in X$ mit $f(x^*) = 0$. Falls $det(f'(x^*)) \ne 0$, so ist x^* lokal eindeutig, d.h. $\exists$ Umgebung U von x^*, sodass $\hat{x} \in U$, $f(\hat{x}) = 0 \Rightarrow \hat{x} = x^*$.

7.2 Kondition

Für die absolute Kondition des Problems $P : f \to x^*$ bzgl. einer Norm $||.||$ gilt:

$$\kappa = \left\|(f'(x^*))^{-1}\right\|$$

7.3 Bisektionsverfahren

7.3.1 Algorithmus

$x_0 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$
Für $k = 0, 1, ...\{$
  STOP, falls $f(x_k) = 0$
  $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k$, falls $f(a_k)f(x_k) < 0$
  $a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k$, falls $f(x_k)f(b_k) < 0$
  $x_{k+1} = \frac{1}{2}(a_{k+1} + b_{k+1})$
  STOP, falls $|a_{k+1} - b_{k+1}| < 2 \cdot TOL$
}

Globale Konvergenz:

$$|x_k - x^*| \le \frac{1}{2}|I_k| = \frac{1}{2^{k+1}}|b_0 - a_0|$$

7.4 Newton-Verfahren

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, $f(x^*) = 0, f'(x^*) \ne 0$, dann konvergiert das Newton-Verfahren

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

lokal quadratisch.

7.4.1 Mehrdimensional

Sei $f : X \to \mathbb{R}^n, X \subset \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar, $f(x^*) = 0$, dann gilt:

$$x_{k+1} = x_k - J_f^{-1}(x_k)f(x_k)$$

8 Optimierung

8.1 Optimalitätsbedingungen

Definitionen:

- $C^m(x) = \{f : X \to \mathbb{R} | f\ m\text{-mal stetig differenzierbar}\}$
- Sei $f \in C^1(x)$ und $\nabla f(x) = 0$ für ein $x \in X$.
  Dann heißt x **stationärer Punkt**.
- Sei $X \subset \mathbb{R}^m$ offen, $f \in C^1(x)$, x^* lokales Minimum.
  Dann ist x^* stationärer Punkt.
- Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(x)$, x^* stationärer Punkt mit $H_f(x^*) = \nabla^2 f(x^*)$ positiv definit, dann ist x^* ein **lokales Minimum**.
  (positive Definitheit ist hinreichend, aber nicht unbedingt notwendig)
- Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(x)$, x^* stationärer Punkt mit $H_f(x^*) = \nabla^2 f(x^*)$ negativ definit, dann ist x^* ein **lokales Maximum**.
  (negative Definitheit ist hinreichend, aber nicht unbedingt notwendig)
- Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(x)$, x^* stationärer Punkt mit $H_f(x^*) = \nabla^2 f(x^*)$ indefinit, dann ist x^* ein **Sattelpunkt**.

8.2 Newton-Verfahren

Sei $f \in C^2(x)$. Gesucht sei die Lösung von $\nabla f(x) = 0$.

$$x_{k+1} = x_k - H_f(x_k)^{-1}\nabla f(x_k); \quad H_f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1 x_1} f(x) & \dots & \partial_{x_1 x_n} f(x) \\ . & \ddots & . \\ \partial_{x_n x_1} f(x) & \dots & \partial_{x_n x_n} f(x) \end{pmatrix}$$

Das Iterationsverfahren besitzt lokal quadratische Konvergenz zu einem stationären Punkt x^* von f, falls $H(x^*)$ invertierbar ist.

8.3 Abstiegsverfahren

Definition:

- $d \in \mathbb{R}^n$ heißt **Abstiegsrichtung** von f an der Stelle x, falls $\exists\, \delta > 0$, sodass gilt:
$$f(x + sd) < f(x) \quad \forall\, s \in (0, \delta]$$

8.3.1 Algorithmus

Wähle $x^{(0)}$
Für $k = 0, 1, ...\{$
  STOP, falls $\nabla f\left(x^{(k)}\right) \approx 0$
  Bestimme Abstiegsrichtung $d^{(k)}$ für f in $x^{(k)}$
  Bestimme Schrittweite $s_k > 0$ mit $f\left(x^{(k)} + s_k d^{(k)}\right) < f\left(x^{(k)}\right)$
  Setze $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s_k d^{(k)}$
}

8.3.2 Gradientenverfahren

Wähle im obigen Algorithmus:

$$d^{(k)} = -\nabla f\left(x^{(k)}\right)$$

Bestimmung der Schrittweite (2 Möglichkeiten):

1) "Exakte Schrittweite":
$$\min_{\delta > 0} f\left(x^{(k)} + sd^{(k)}\right)$$
2) "Armijo-Schrittweite":

   Wähle Parameter $\sigma \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$
   Setze $s = 1$
   Für $l = 1, 2, ...\{$
     Falls $f\left(x^{(k)} + sd^{(k)}\right) - f\left(x^{(k)}\right) \le \sigma s \cdot \nabla f\left(x^{(k)}\right)^T d^{(k)}$:
       Akzeptiere Schrittweite: $s_k = s$
     Sonst: $s \to \frac{s}{2}$
   }

   Dieses Verfahren konvergiert gegen einen stationären Punkt von f oder es erzeugt eine Folge $\left(x^{(k)}_{k \in \mathbb{N}}\right)$, für die gilt:
   - $f\left(x^{(k+1)}\right) < f\left(x^{(k)}\right)\ \forall k$ und
   - alle Häufungspunkte sind stat. Punkte von f

8.4 Globalisiertes Newton-Verfahren

Wähle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ und $\sigma \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \rho > 0$.
Für $k = 0, 1, ...\{$
  STOP, falls $\nabla f\left(x^{(k)}\right) \approx 0$
  Löse $H_f\left(x^{(k)}\right)\tilde{d}^{(k)} = -\nabla f\left(x^{(k)}\right)$, falls möglich
  Falls Newton-Gleichung nicht lösbar oder $\nabla f\left(x^{(k)}\right)\tilde{d}^{(k)} > -\rho\left|\left|\nabla f\left(x^{(k)}\right)\right|\right|^2$
    $d^{(k)} = -\nabla f\left(x^{(k)}\right)$
  Sonst: $d^{(k)} = \tilde{d}^{(k)}$
  Bestimme Armijo-Schrittweite s_k (siehe oben)
  Setze $x^{(k+1)} = x^{(}k) + s_k d^{(k)}$
}

9 Funktionentheorie

9.1 Komplexe Differenzierbarkeit

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt in z_0 komplex differenzierbar, falls der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

existiert.

- Ist f auf ganz U komplex differenzierbar, so heißt f analytisch.
- Kompositionen, Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten analytischer Funktionen sind wieder analytisch.
- Potenzreihen sind analytisch in ihrem Konvergenzbereich

Wir schreiben $f(z) = f(x + iy) = F_1(x, y) + i \cdot F_2(x, y)$ und setzen:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix}$$

9.1.1 Cauchy-Riemannsche DGL

f ist genau dann in $z = x + iy$ komplex differenzierbar, falls F in (x, y) differenzierbar ist und folgende DGL erfüllt sind:

$$\partial_x F_1(x, y) = \partial_y F_2(x, y)$$

$$\partial_y F_1(x, y) = -\partial_x F_2(x, y)$$

9.1.2 Folgerungen

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch und das zugehörige reelle $F : U \to \mathbb{R}^2$ 2-mal stetig differenzierbar, dann gilt:

$$\Delta F_1(x) = \partial_1^2 F_1(x) + \partial_2^2 F_1(x) = 0$$

$$\Delta F_2(x) = \partial_1^2 F_2(x) + \partial_2^2 F_2(x) = 0$$

9.2 Komplexe Integration

9.2.1 Kurvenintegrale

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ stetig, $\gamma \in C^1([a, b], U)$, dann lautet das komplexe Kurvenintegral von f entlang von γ:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt$$

Mit

$$f(z) = f(x_1 + ix_2) = f_1(z) + if_2(z); \quad \gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$$

folgt

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b \begin{pmatrix} f_1(\gamma(t)) \\ -f_2(\gamma(t)) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \end{pmatrix} dt + i\int_a^b \begin{pmatrix} f_2(\gamma(t)) \\ f_1(\gamma(t)) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \dot{\gamma}_1(t) \\ \dot{\gamma}_2(t) \end{pmatrix} dt$$

Definitionen:

- $U \subset \mathbb{C}$ heißt **zusammenhängend**, falls es $\forall\, z_1, z_2 \in U$ einen Weg $\gamma : [0, 1] \to U$ gibt, sodass $\gamma(0) = z_1, \gamma(1) = z_2$.
- $U \subset \mathbb{C}$ heißt **einfach zusammenhängend**, falls das Innere jeder ganz in U verlaufenden geschlossenen Kurve zu U gehört.

Sei $U \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend, $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch:

- Dann gilt für jede geschlossene Kurve γ, die ganz in U verläuft:
$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$
- Bei nicht geschlossenen Kurven ist das komplexe Kurvenintegral wegunabhängig.
- Dann ist für jedes $a \in U$
$$F(z) = \int_a^z f(\xi)d\xi$$
  eine Stammfunktion von f und es gilt:
$$\int_{z_0}^{z_1} f(\xi)d\xi = F(z_1) - F(z_0)$$

9.2.2 Cauchy-Integralformel

Sei $U \subset \mathbb{C}, f : U \to \mathbb{C}$ analytisch, γ geschlossen mit Innerem ganz in U, dann gilt für jeden Punkt z im Inneren von γ:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

9.3 Potenzreihendarstellung analytischer Funktionen

Sei $f : U \to \mathbb{C}$ analytisch, $\{|z - a| \le r\} \subset U$ für ein $a \in U, r > 0$, dann gilt für $|z - a| < \rho < r$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$$

$$\text{mit } c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - a| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}d\xi$$

Jede beschränkte analytische Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist konstant.

9.4 Laurent-Reihen und Singularitäten

Idee: Entwickle $f : \mathbb{C}\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ analytisch in einer Reihe um die Singularität z_0:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - z_0)^n}_{\text{Hauptteil (HT)}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n}_{\text{Nebenteil (NT)}}$$

Definitionen:

- Sei $U \subset \mathbb{C}, f : U \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann heißt $z_0 \in U$ **Nullstelle der Ordnung** m, falls $f(z_0) = f'(z_0) = ... = f^{(m-1)}(z_0) = 0$ und $f^{(m)}(z_0) \ne 0$.
- Sei $z_0 \in U \subset \mathbb{C}$ offen, $f : U\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann heißt z_0 **isolierte Singularität** von f.
  - Ist f auf einer punktierten Umgebung von z_0 beschränkt, so heißt z_0 **hebbare Singularität**.
  - Hat $(z - z_0)^m \cdot f(z)$ für ein $m \ge 1$ eine hebbare Singularität in z_0, dann heißt z_0 **Pol**. Das kleinste solche m heißt **Ordnung des Pols**.
  - Ansonsten heißt z_0 **wesentliche Singularität**.

Eigenschaften:

1) LR konvergiert, falls Hauptteil (HT) und Nebenteil (NT) konvergieren.
2) NT ist übliche Potenzreihe; sie habe den Konvergenzradius $R \in [0, \infty)$.
3) HT ist eine Potenzreihe in $w = \frac{1}{z - z_0}$; sie habe den Konvergenzradius $\frac{1}{r} \in [0, \infty)$.
   HT konvergiert somit, falls $|z - z_0| > r$.
4) Falls $0 \le r < R \le \infty$, so konvergiert die LR im Kreisring $\{r < |z - z_0| < R\}$.
5) Eine konvergente LR kann gliedweise differenziert werden.
6) Ist $c_{-1} = 0$, so besitzt die LR die Stammfunktion
$$\sum_{n=-\infty, n \ne -1}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$$
   die im selben Kreisring konvergiert.

Sei $K_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} | 0 \le r < |z - z_0| < R \le \infty\}, f : K_{r,R}(z_0) \to \mathbb{C}$ analytisch, dann gilt:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

$$\text{mit } c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z - z_0| = \rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz; \quad r < \rho < R$$

9.5 Residuenkalkül

Idee: Verwende Laurent-Reihe zur Berechnung von Integralen.

Sei $f : U\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann lautet das Residuum von f in z_0:

$$Res_{z_0}(f) = Res(f, z_0) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z - z_0| = \rho} f(z)dz$$