

Inhaltsverzeichnis

I Werkstoffe der Elektrotechnik 1

1 Aufbau der Materie 1

1.1 Quanten und Wellen 1

1.1.1 Schrödingergleichung 1

1.1.2 1-dimensinaler Potentialtopf 1

1.1.3 3-dimensionaler Potentialtopf 2

1.1.4 Sonstiges 2

1.2 Wasserstoffatom 2

1.3 Aufbau des Periodensystems 2

1.3.1 Quantenzahlen 2

1.3.2 Pauli-Prinzip 2

1.3.3 Hundsche Regeln 2

1.4 Bindungstypen 3

1.4.1 Ionische Bindung 3

1.4.2 Kovalente Bindung 3

1.4.3 Metallische Bindung 3

1.5 Aggregatzustände der Materie 3

1.5.1 Gase 3

1.6 Kristallstrukturen 3

1.6.1 Primitiv kubisch (sc) 3

1.6.2 Kubisch raumzentriert (bcc) 3

1.6.3 Kubisch flächenzentriert (fcc) 4

1.7 Metalle und Legierungen 4

1.7.1 Mischkristallbildung durch Leerstellendiffusion 4

2 Mechanische Eigenschaften der Festkörper 4

3 Thermische Eigenschaften der Festkörper 4

3.1 Spezifische Wärme 4

3.2 Thermische Ausdehnung 4

3.3 Wärmeleitung 4

3.4 Freies Elektronengas / spezifische Wärme der Elektronen 5

3.4.1 Wiedemann-Franzsesches Gesetz 5

4 Ladungstransport in Festkörpern 5

5 Elektrische Eigenschaften der Metalle 5

5.1 Thermoelektrische Effekte 6

5.1.1 Peltier-Effekt 6

5.1.2 Supraleitung 6

6 Halbleiter 6

6.1 Leitungsband 6

6.2 Valenzband 6

6.3 Diffusion 7

6.4 Ausgleich der Minoritätsladungsträger 7

6.5 Ladungstransporteigenschaften 7

7 Dielektrische Eigenschaften von Festkörpern 7

7.1 Polarisation 7

7.1.1 Elektronische Polarisation 7

7.1.2 Ionische Polarisation 7

7.1.3 Orientierungspolarisation 8

7.2 Dielektrizitätskonstante 8

8 Magnetische Eigenschaften von Festkörpern 8

8.1 Elementare magnetische Dipolmomente 8

8.2 Diamagnetismus 8

8.3 Paramagnetismus 8

8.4 Ferromagnetismus 8

8.5 Leitungselektronen 9

9 Physikalische Konstanten 9

**Teil I
Werkstoffe der Elektrotechnik**

1 Aufbau der Materie

1.1 Quanten und Wellen

$$\text{Wellenlänge: } \lambda = \frac{c}{f} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

$$\text{Energie: } E = mc^2 = \hbar\omega = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\text{Impuls: } p = mv = \hbar k = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

$$\text{Wellenzahl: } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\text{Phasengeschwindigkeit: } v_{Ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{v_{Teilchen}}{2}$$

$$\text{Gruppengeschwindigkeit: } v_{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m}$$

$$\text{Dispersionsrelation: } E = \omega\hbar = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

1.1.1 Schrödingergleichung

Herleitung:

Ausgehend von der Dispersionsrelation:

$$\omega \circ \bullet - j \frac{\partial}{\partial t}$$

$$k \circ \bullet - j \nabla$$

Allgemeine Schrödingergleichung:

$$-j\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \Delta \Psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t)$$

Zeitunabhängige Schrödingergleichung:

Durch den Separationsansatz $\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r})\Phi(t)$ lässt sich die Zeitabhängigkeit abtrennen:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \Delta \Psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \Psi(\vec{r}) = E \Psi(\vec{r})$$

1.1.2 1-dimensinaler Potentialtopf

Ansatz für DGL:

$$\Psi(x) = Ae^{jkx} + Be^{-jkx}$$

bzw.

$$\Psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

Für den jeweiligen Bereich mit dem Potential V gilt:

$$k = \frac{\sqrt{2m^*(E - V)}}{\hbar}$$

Im Falle von unendlich hohen Barrieren und der Breite a gilt:

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m^* a^2} n^2 = \frac{\hbar^2}{2m^*} k^2$$

mit $k = \frac{n\pi}{a}$

Randbedingungen:

Für die Wellenfunktion $\Psi(x)$ gelten folgende Randbedingungen:

- $\Psi(x)$ ist stetig (ohne Sprung)
- $\Psi(x)$ ist differenzierbar
- $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x)\Psi(x) dx = 1$

1.1.3 3-dimensionaler Potentialtopf

Die Lösung erfolgt wie beim 1-dimensionalen Potentialtopf durch den Separationsansatz

$$\Psi(x, y, z) = \Psi(x)\Psi(y)\Psi(z)$$

Im Falle eines Würfels mit Kantenlänge a und unendlich hohen Barrieren gilt:

$$\Psi_{nml}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{a^3}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi z}{a}\right)$$

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m^* a^2} (n^2 + m^2 + l^2)$$

$$E = \frac{\hbar^2}{2m^*} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

1.1.4 Sonstiges

Teilchenstromdichte:

$$j = (\Psi^* \Psi) v_{gr} = (\Psi^* \Psi) \frac{\hbar k}{m_0}$$

Reflexionskoeffizient: $\frac{j_R}{j_0}$

Transmissionskoeffizient: $\frac{j_T}{j_0}$

1.2 Wasserstoffatom

a : Bohrscher Atomradius, R_H : Rydbergkonstante
 λ : emittierte bzw. absorbierte Wellenlänge

Für die Energieniveaus eines H -Atoms gilt:

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left(\frac{1}{na}\right)^2 = -\frac{m_0 e^4}{2(4\pi\epsilon_0 \hbar)^2} \frac{1}{n^2}$$

2,18 · 10⁻¹⁸ J

$$\lambda = \frac{1}{R_H \left| \frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right|}; \quad n, m \in \mathbb{N}$$

1.3 Aufbau des Periodensystems

→ siehe Skript S. 24

1.3.1 Quantenzahlen

Hauptquantenzahl:

≙ Energieeigenwerte
 $n = 1, 2, \dots$ (≙ K, L, \dots -Schale)

Nebenquantenzahl:

≙ Orbitalgestalt
 $l = 0, \dots, n - 1$ (≙ s, p, d, f -Zustände)

Magnetische Quantenzahl:

≙ Orientierung der Orbitale
 $m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$ (≙ L)

Spinquantenzahl:

$$s = \pm \frac{1}{2}$$

Entartungsgrad:

Anzahl der Kombinationen der Quantenzahlen mit gleicher Energie.
 $\Rightarrow 2n^2$

Hauptquantenzahl
 Nebenquantenzahl
 Magnetische Quantenzahl

		-3	-2	-1	0	1	2	3
K	1s				●			
	L	2s			●			
2p				●	●	●		
M	3s				●			
	3p			●	●	●		
	3d		●	●	●	●	●	
N	4s				●			
	4p			●	●	●		
	4d		●	●	●	●	●	
	4f	●	●	●	●	●	●	●
O	5s				●			
	5p			●	●	●		
	5d		●	●	●	●	●	
	5f	●	●	●	●	●	●	●
P	6s				●			
	6p			●	●	●		
	6d		●	●	●	●	●	
Q	7s				●			

● mit 2 Zuständen besetzbarer Platz

1.3.2 Pauli-Prinzip

Alle Elektronen unterscheiden sich in mindestens einer Quantenzahl.

1.3.3 Hundsche Regeln

1) Schale wird so aufgefüllt, dass

$$|S| = \left| \sum s_i \right| \quad \text{mit } s = \pm \frac{1}{2}$$

maximal wird.

2) Quantenzahl $|L|$ maximal.

3) • Schale weniger als halbvoll

- Bahndrehimpuls und Spin antiparallel
- Gesamtdrehimpuls $|J| = ||L| - |S||$

- Schale mehr als halbvoll
 - Bahndrehimpuls und Spin parallel
 - Gesamtdrehimpuls $|J| = |L| + |S|$

Volle Schalen liefern keinen Beitrag zu S, L und $J!$

Q	7s	7p		
P	6s	6p	6d	
O	5s	5p	5d	5f
N	4s	4p	4d	4f
M	3s	3p	3d	
L	2s	2p		
K	1s			
	s	p	d	f

1.4 Bindungstypen

1.4.1 Ionische Bindung

≡ Bindung durch Elektronenaustausch

Voraussetzung:

- Unterschiedliche, leicht zu ionisierende Atome
- Differenz der Elektronegativität i.d.R. $\Delta E > 1,7$

Die Ionisierung läuft prinzipiell in 3 Schritten ab:

- 1) Ionisierung des Kations (Energiezufuhr)
- 2) Ionisierung des Anions (Energieabgabe)
- 3) Molekülbildung (Energieabgabe)

Die elektrische Bindungsenergie, die bei der Molekülbildung frei wird, berechnet sich wie folgt:

$$E_{el} = \int_{\infty}^{r_0} -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

wobei r_0 der Abstand ist und q_1, q_2 die Ladungen der Ionen darstellen.

1.4.2 Kovalente Bindung

≡ Bindung durch gemeinsame Elektronen

Voraussetzung:

- Differenz der Elektronegativität i.d.R. $\Delta E < 1,7$

1.4.3 Metallische Bindung

= Sonderfall der kovalenten Bindung, bei der die Valenzelektronen nicht lokalisiert sind.

1.5 Aggregatzustände der Materie

1.5.1 Gase

p : Druck, V : Volumen, T : Temperatur, ρ : Dichte
 n_A : Anzahl Atome, k_B : Boltzmannkonstante
 n_{mol} : Stoffmenge, R : Gaskonstante, N : Teilchendichte
 N_A : Avogadro-Konstante, A_r : Relative Atommasse

M : Molare Masse, u : Atomare Masseneinheit

$$\frac{pV}{T} = n_{mol}R = n_A k_B = \frac{n_A R}{N_A}; \quad [n_{mol}R] = \frac{J}{K} \text{ (ideales Gas)}$$

$$M = A_r \cdot 10^{-3} \frac{kg}{mol}; \quad [A_r] = 1$$

$$n_{mol} = \frac{n_A}{N_A} = \frac{m}{M}$$

$$R = N_A k_B$$

$$p = \frac{1}{3} N m \overline{v^2} = N k_B T$$

$$N = \frac{n_A}{V} = \frac{n_{mol} N_A}{V} = \frac{\rho N_A}{M} = \frac{p}{k_B T}$$

$$\rho = \frac{NM}{N_A} = \frac{n_A A_r u}{V} = \frac{m}{V}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{f}{2} k_B T$$

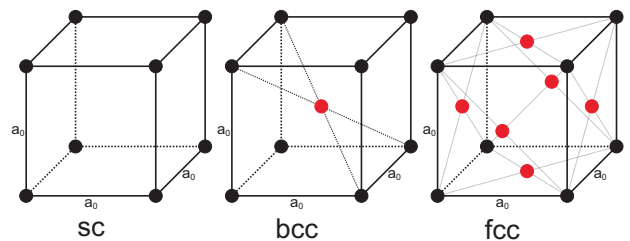
mit f : Anzahl der Freiheitsgrade (= 3 für einatomige Gase)

1.6 Kristallstrukturen

KZ : Koordinationszahl (Zahl der nächsten Nachbarn)

n_{EZ} : Anzahl der Atome pro Einheitszelle (EZ)

r : Atomradius



Packungsdichte:

$$P = \frac{\text{Volumen (Atome)}}{\text{Volumen (EZ)}} = \frac{n_{EZ} \frac{4}{3} \pi r^3}{V_{EZ}} = \frac{4 n_{EZ} \pi r^3}{3 a_0^3}$$

Achtung:

Für die Berechnung von n_{EZ} müssen Atome, die von angrenzenden Zellen auch verwendet werden, dementsprechend gewichtet werden!

1.6.1 Primitiv kubisch (sc)

(=simple cubic)

$$n_{EZ} = 1$$

$$r = \frac{1}{2} a_0$$

$$KZ = 6$$

$$P = \frac{1}{6} \pi \approx 0,52$$

1.6.2 Kubisch raumzentriert (bcc)

(=body centered cubic)

$$n_{EZ} = 2$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{4} a_0$$

$$KZ = 8$$

$$P = \frac{\sqrt{3}}{8} \pi \approx 0,68$$

1.6.3 Kubisch flächenzentriert (fcc)

(=face centered cubic)

$$n_{EZ} = 4$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{4} a_0$$

$$KZ = 12$$

$$P = \frac{\sqrt{2}}{6} \pi \approx 0,74$$

1.7 Metalle und Legierungen

1.7.1 Mischkristallbildung durch Leerstellendiffusion

S: Teilchenstromdichte, D: Diffusionskoeffizient
 N: Teilchenkonzentration, x_D: Mittlere Eindringtiefe
 E_A: Aktivierungsenergie für Leerstellendiffusion

$$S = -D \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$D = D_0 e^{-\frac{E_A}{k_B T}}; \quad [D] = \frac{cm^2}{s}$$

$$x_D = \sqrt{Dt}$$

2 Mechanische Eigenschaften der Festkörper

ρ: Dichte, ε: Dehnung, σ: Mech. Spannung (= Druck)
 E: Elastizitätsmodul, V: Volumen, P: Packungsdichte
 r: Atomradius, a₀: Gitterkonstante, m_A: Atommasse
 n_{EZ}: Anzahl der Atome pro Einheitszelle
 α: Längenausdehnungskoeffizient

$$\rho = \frac{m_A P}{\frac{4}{3} \pi r^3} = \frac{m_A n_{EZ}}{a_0^3}; \quad [\rho] = \frac{kg}{m^3}$$

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta T$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \epsilon E = \alpha \Delta T E; \quad [\sigma] = \frac{N}{m^2}$$

$$E = -\frac{1}{r_0} \left. \frac{dF}{dr} \right|_{r=r_0}; \quad [E] = \frac{N}{m^2}$$

V(r): Wechselwirkungsenergie, p: Druck
 K: Kompressionsmodul; F(r): Kraft (im Gleichgewicht)
 ν: Poissonsche Zahl

$$V(r) = \underbrace{-\frac{\alpha}{r^n}}_{\text{anziehend}} + \underbrace{\frac{\beta}{r^m}}_{\text{abstoßend}}; \quad n < m$$

Für Ionen gilt: n = 1

$$F(r) = -\frac{dV}{dr}$$

$$K = -\frac{p}{\frac{\Delta V}{V}} = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

Im Normalfall gilt: ν = 0,3 ⇒ K ≈ 0,8E

3 Thermische Eigenschaften der Festkörper

3.1 Spezifische Wärme

C: Wärmekapazität, c: Spezifische Wärmekapazität
 c_m: Molwärme, U: Innere Energie T: Temperatur

n_A: Anzahl der Atome, k_B: Boltzmannkonstante, m: Masse
 M: Molare Masse, R: Gaskonstante, T_F: Fermi-Temperatur
 E_F: Fermi-Energie

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = cm = 3n_A k_B = \frac{3Rm}{M}; \quad [C] = \frac{J}{K}; \quad [A_r] = \frac{g}{mol}$$

$$c = \frac{C}{m} = \frac{1}{m} \frac{\Delta U}{\Delta T} = \frac{c_m}{M} = \frac{3n_A k_B}{m} = \frac{3R}{M}; \quad [c] = \frac{J}{kgK}$$

$$c_m = \underbrace{3R}_{\text{Atome}} + \underbrace{\frac{6RT}{T_F}}_{\text{Elektronen}} = 3R \left(1 + 2 \frac{T}{T_F} \right); \quad [c_m] = \frac{J}{molK}$$

Elektronen-Anteil kann für hohe T vernachlässigt werden!

c_m = 3R = 24,9 $\frac{J}{molK}$ für hohe Temperaturen

T³ ~ C, c, c_m für niedrige Temperaturen

$$T_F = \frac{E_F}{k_B}$$

$$R = k_B N_A$$

$$U = 3Nk_B T$$

3.2 Thermische Ausdehnung

Δl: Längenausdehnung, ΔV: Volumenausdehnung
 α: Längenausdehnungskoeffizient, T_S: Schmelztemperatur
 β: Volumenausdehnungskoeffizient

$$\Delta l = \alpha l_0 \Delta T$$

$$\Delta V = \beta V_0 \Delta T \approx 3\alpha V_0 \Delta T$$

$$\beta \approx 3\alpha$$

$$\alpha \sim \frac{1}{T_S} \quad (\text{Grüneisen-Regel})$$

3.3 Wärmeleitung

Q: Wärmemenge, A: Querschnitt, W: Wärmestromdichte
 I: Wärmestrom (≙ Leistung), λ: Wärmeleitfähigkeit
 $\frac{\Delta Q}{A}$: Transportierte Wärmemenge, G: Wärmeleitwert
 v_x: Geschwindigkeit in x-Richtung, n: Teilchendichte

$$\nabla T = \frac{T_a(t) - T_b(t)}{l} \Rightarrow \textcircled{b} \xrightarrow{x} \textcircled{a}$$

$$\frac{\Delta Q}{A} = -\lambda \nabla T \Delta t$$

$$Q = CT; \quad [Q] = J$$

$$I = \dot{Q} = -\lambda A \nabla T = G \Delta T = C_a \dot{T}_a = -C_b \dot{T}_b$$

$$G = \lambda \frac{A}{l}; \quad [G] = \frac{K}{W}; \quad [\lambda] = \frac{W}{Km}$$

$$W = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{\Delta Q}{A \Delta t} = n v_x c \Delta T$$

l_x: Freie Weglänge zwischen zwei Streuprozessen
 C_{Ph}: Wärmekapazität der Phononen pro Volumeneinheit
 ν: Schallgeschwindigkeit, τ: Streuzzeit

$$\Delta T = -\frac{dT}{dx} l_x$$

$$l = v\tau$$

$$\lambda = \frac{1}{3} l C \sqrt{v^2} = \frac{1}{3} C_{Ph} \nu l; \quad [\lambda] = \frac{W}{Km}$$

Differentialgleichungen sind mit folgendem Ansatz zu lösen:

$$T(0, t) = D e^{-Et} + F$$

3.4 Freies Elektronengas / spezifische Wärme der Elektronen

$D(E)$: Zustandsdichte, $f(E, T)$: Fermiverteilung
 n : Elektronendichte, E_F : Fermienergie

$$D(k) \sim k^2$$

$$D(E) = \frac{1}{V} \frac{dZ}{dE} = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{E}$$

$$D(E) \approx 1,0622 \cdot 10^{56} \frac{s^3}{kg^{\frac{3}{2}}m^6} \sqrt{E}; \quad [D] = \frac{1}{cm^3 eV}$$

$$D(E_F) = \frac{3n}{2E_F}$$

$$E_F = k_B T_F$$

Die Zustandsdichte $D(E)$ gibt an, wieviele mögliche Zustände bei einer gegebenen Energie besetzt werden können.

$$f(E, T) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_F}{k_B T}} + 1}$$

$$\int f(E, T) dE = -k_B T \cdot \ln \left(1 + e^{-\frac{E-E_F}{k_B T}} \right)$$

$$f(E, T) \approx e^{-\frac{E-E_F}{k_B T}} \quad (\text{Boltzmann-Näherung})$$

Die Fermiverteilung gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Zustand der Energie E bei der Temperatur T von einem Teilchen besetzt ist.

$$n = \int_0^\infty D(E) f(T, E) dE$$

Für $T = 0K$ gilt:

$$n = \int_0^{E_F} D(E) dE = \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{3\pi^2} E_F^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}$$

Diese Beziehung ist sehr nützlich bei Metallen, da E_F hier kaum von der Temperatur abhängig ist.

Die Anzahl der anregbaren Elektronen berechnet sich wie folgt:

$$\frac{3k_B T}{E_F} n$$

N_{el} : Anzahl der Leitungselektronen pro Atom, ρ : Dichte
 N_A : Avogadrokonstante, M_{At} : Molare Masse eines Atoms

$$n = \frac{N_{el} \rho N_A}{M_{At}}$$

Elektronendichte des m -ten Quantisierungsniveaus:

$$n_{mQe} = \int_{E_{mQe} + E_L}^\infty D(E) f(T, E) dE$$

3.4.1 Wiedemann-Franz'sches Gesetz

λ : Wärmeleitfähigkeit, σ : el. Leitfähigkeit
 L : Lorentzzahl

$$\frac{\lambda_{el}}{\sigma T} = \frac{\pi^2 k_B^2}{3e^2} = L \quad \text{mit } L = 2,44 \cdot 10^{-8} \frac{V^2}{K^2}$$

4 Ladungstransport in Festkörpern

v_{Gr} : Geschwindigkeit, m^* : effektive Masse
 $E(k)$: Energie von freien Elektronen

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$v_{Gr} = \frac{\hbar k}{m}$$

$$m^* = \frac{\hbar^2}{\frac{d^2 E(k)}{dk^2}}$$

5 Elektrische Eigenschaften der Metalle

n : Teilchendichte, τ : Streuzzeit, σ : el. Leitfähigkeit
 \vec{j} : Stromdichte, μ : Ladungsträgerbeweglichkeit
 R : Widerstand, A : Fläche, l : Länge
 α : Temperaturkoeffizient, ρ : Spezifischer Widerstand

$$\sigma = -\frac{en\Delta p_x}{m^* E_x} = \frac{e^2 \tau}{m^*} n; \quad [\sigma] = \frac{S}{m}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$\mu = \frac{e\tau}{m^*}; \quad [\mu] = \frac{cm^2}{Vs}$$

$$R = \frac{\rho l}{A} = \frac{l}{\sigma A}$$

$$\rho = \rho_{20^\circ C} [1 + \alpha(T - 20^\circ C)]$$

Die Leitfähigkeit von Metallen nimmt für hohe Frequenzen, vergleichbar mit einem Tiefpass erster Ordnung, ab:

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad (\text{Wirkleitfähigkeit})$$

$\frac{1}{\tau}$: Streuwahrscheinlichkeit

$\frac{1}{\tau_i}$: Streuung an Fremdatomen

$\frac{1}{\tau_{Ph}}$: Streuung durch Gitterschwingungen

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{Ph}} + \frac{1}{\tau_i}$$

$$\tau_i \sim \frac{T^{\frac{3}{2}}}{n}$$

$$\tau_{Ph} \sim \frac{1}{T^{\frac{3}{2}}}$$

l : freie Weglänge, ρ : spez. Widerstand

v_F : Fermigeschwindigkeit

$$l = v_F \tau$$

$$v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m_0}}$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma}; \quad [\rho] = \Omega m$$

$$\rho = \rho_{Ph} + \rho_i \quad (\text{Mattiessen'sche Regel})$$

$$\rho_{Ph} \sim T^5 \quad (\text{für tiefe Temperaturen})$$

ρ_{Ph} ist temperaturabhängig (≈ 0 für tiefe Temperaturen).
 ρ_i ist temperaturunabhängig.

Für kleine Konzentrationen gilt außerdem:

$$\rho_i \sim \text{Mischungsverhältnis}$$

Dies bedeutet, dass ρ_i bei doppelter Konzentration an Fremdatomen in etwa doppelt so groß wird.

5.1 Thermoelektrische Effekte

E_x : el. Feld, S : Seebeckkoeffizient, ΔU : Thermospannung
 D_n : Diffusionskoeffizient

$$E_x = S \frac{dT}{dx}$$

$$S = -\frac{e}{\sigma} \frac{d}{dT}(D_n n); \quad [S] = \frac{\mu V}{K}$$

$$\Delta U = S \Delta T$$

$$D_n = v_x l_x = v_x^2 \tau$$

5.1.1 Peltier-Effekt

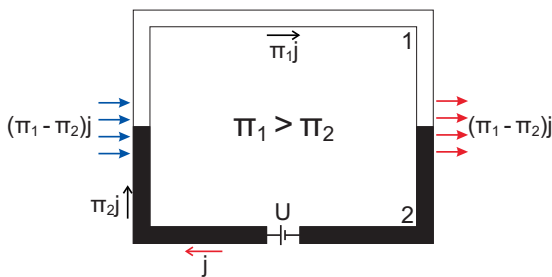
W : Wärmestromdichte, j : Stromdichte, Π : Peltierkonstante

$$W = \Pi j = STj$$

$$\Pi = ST$$

$$W_{el} = (\Pi_A - \Pi_B)j \quad (A \rightarrow B)$$

Kühlung erfolgt an der Stelle, an der gilt: $W_{el} < 0$.
 Bei einem Halbleiter ist dies die Stelle, an der der Strom vom n -dotierten zum p -dotierten Halbleiter fließt.



5.1.2 Supraleitung

$H_C(T)$: kritische Feldstärke, I_C : Kritischer Strom
 r : Radius des Leiters, T_C : kritische Temperatur
 Λ_L : Londonsche Eindringtiefe, μ_0 : absolute Permeabilität

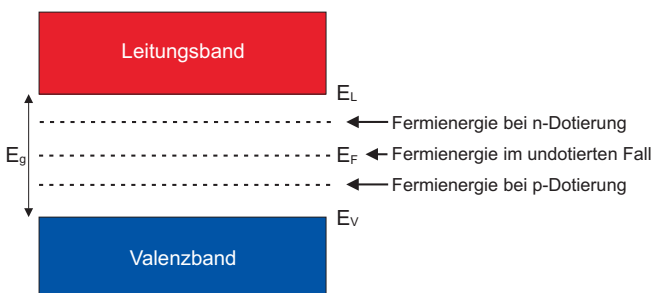
$$H_C(T) = H_{C,0K} \left[1 - \left(\frac{T}{T_C} \right)^2 \right]; \quad [H] = \frac{A}{m}$$

$$I_C = 2\pi r H_C$$

$$\Lambda_L = \sqrt{\frac{\lambda_L}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}}$$

$$\lambda_L = \frac{m}{n_s e^2}$$

6 Halbleiter



$f_i(E, T)$: Besetzungswahrscheinlichkeit, p : Löcherdichte
 n : Elektronendichte, $D_i(E)$: Zustandsdichte

N_L^*, N_V^* : effektive Zustandsdichte, M_L : Anzahl der äquivalenten Leitungsbandminima in der Brillouinzone

Wenn ein Element beim Dotieren (je nach Einbau) sowohl als Donator, als auch als Akzeptor wirken kann, so spricht man von einem **amphoterem Charakter**.

6.1 Leitungsband

$$f_n(E, T) = f(E, T)$$

$$n = \int_{E_L}^{\infty} D_L(E) f(E, T) dE$$

$$D_L(E) = M_L \frac{(2m_n^*)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E - E_L}; \quad E > E_L$$

$$N_L^* = 2M_L \left[\frac{m_n^* k_B T}{2\pi \hbar^2} \right]^{\frac{3}{2}} \quad (M_L \text{ ist meist } 1)$$

$$n = N_L^* e^{-\frac{E_L - E_F}{k_B T}} \quad (\text{Boltzmann-Näherung})$$

$$\Rightarrow E_L - E_F = k_B T \cdot \ln \left(\frac{N_L^*}{n} \right)$$

6.2 Valenzband

$$f_p(E, T) = 1 - f(E, T)$$

$$p = \int_{-\infty}^{E_V} D_V(E) [1 - f(E, T)] dE$$

$$D_V(E) = \frac{(2m_p^*)^{\frac{3}{2}}}{2\pi^2 \hbar^3} \sqrt{E_V - E}; \quad E < E_V$$

$$N_V^* = 2 \left[\frac{m_p^* k_B T}{2\pi \hbar^2} \right]^{\frac{3}{2}}$$

$$p = N_V^* e^{-\frac{E_F - E_V}{k_B T}} \quad (\text{Boltzmann-Näherung})$$

$$\Rightarrow E_F - E_V = k_B T \cdot \ln \left(\frac{N_V^*}{p} \right)$$

n_i : intr. Elektronendichte, p_i : intr. Löcherdichte
 N_A^- : Akzeptoren-Dichte, N_D^+ : Donatoren-Dichte
 m_e^* : effektive Elektronenmasse, E_F : Fermienergie

$$m_e^* = (m_{\parallel}^* \cdot m_{\perp}^{*2})^{\frac{1}{3}} = (m_{el}^* \cdot m_{et}^{*2})^{\frac{1}{3}}$$

$$m_p^* = m_h^* = (m_{hl}^{*\frac{3}{2}} + m_{hh}^{*\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}$$

$$n_i = p_i = \sqrt{N_L^* N_V^*} e^{-\frac{E_g}{2k_B T}}$$

$$T^{\frac{3}{2}} \sim \sqrt{N_L^* N_V^*}$$

$$T^{\frac{3}{2}} \sim N_L^*, N_V^*$$

$$E_F = \frac{E_V + E_L}{2} + \frac{k_B T}{2} \ln \left(\frac{N_V^*}{N_L^*} \right)$$

$$np = n_i p_i = n_i^2 = p_i^2 \quad (\text{im thermodyn. Gleichgewicht})$$

$$n + N_A^- = p + N_D^+$$

Im Falle einer vollständigen Ionisation gilt:

bei n-Dotierung $N_A^- = 0; \quad p \ll N_D^+ \Rightarrow n \approx N_D^+$
 bei p-Dotierung $N_D^+ = 0; \quad n \ll N_A^- \Rightarrow p \approx N_A^-$

6.3 Diffusion

$L_{n,p}$: Diffusionslänge, τ : Streuzzeit, e : Elementarladung
 $\mu_{n,p}$: Beweglichkeit, $D_{n,p}$: Diffusionskonstante
 m_p^* : effektive Lochmasse, L_D : Debye-Länge, ϵ : Permittivität
 N_D : Donatoren-Dichte, n : Elektronendichte

$$L_{n,p} = \sqrt{D_{n,p}\tau_{n,p}} = \sqrt{\frac{k_B T \mu_{n,p} \tau_{n,p}}{e}}$$

$$L_D = \sqrt{\frac{k_B T \epsilon}{e^2 N_D}}; \quad N_D = n$$

$$D_{n,p} = \frac{k_B T \mu_{n,p}}{e}$$

6.4 Ausgleich der Minoritätsladungsträger

→ S. 129

R : Rekombinationsrate, r : Rekombinationsrate
 G_L : optische Generation, G_T : thermische Generation

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dn}{dt} = G_L + G_T - R = G_L + n_i^2 r - npr$$

$$G_T = n_i^2 r$$

$$R = npr$$

$$\frac{dn}{dt} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \text{stationärer Zustand}$$

6.5 Ladungstransporteigenschaften

\vec{j} : Gesamtstromdichte, \vec{v} : Driftgeschwindigkeit
 τ : Steuzeit, σ intrinsische Leitfähigkeit
 n, p : Ladungsträgerdichten, μ : Ladungsträgerbeweglichkeit

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = -ne \vec{v}_n + pe \vec{v}_p$$

$$\sigma = \mu_n en + \mu_p ep = e^2 \tau \frac{n}{m^*}; \quad [\sigma] = \frac{S}{m}$$

$$\mu = \frac{e\tau}{m^*}; \quad [\mu] = \frac{cm^2}{Vs}$$

$$\vec{v} = \pm \mu \vec{E} \quad (\text{VZ: } \begin{matrix} \text{Löcher} \\ \text{Elektronen} \end{matrix})$$

Typische Werte:

Metalle: $\sigma \approx 10^6 \frac{S}{m}$

Halbleiter: $\sigma \approx 10^{-1} - 10^{-6} \frac{S}{m}$

Isolator: $\sigma < 10^{-7} \frac{S}{m}$

7 Dielektrische Eigenschaften von Festkörpern

7.1 Polarisation

\vec{P} : Polarisation, \vec{p} : Dipolmoment, N : Teilchendichte
 ϵ_0 : el. Feldkonstante, α : Polarisierbarkeit des Atoms
 \vec{E}_a : primäres äußeres el. Feld, ϵ_r : relative Permittivität

\mathcal{X} : Suszeptibilität

$$\vec{P} = N \vec{p} = N \epsilon_0 \alpha \vec{E}_a; \quad [P] = \frac{As}{m^2}$$

$$\epsilon_r = 1 + \mathcal{X}$$

$$\frac{\alpha N}{3} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \quad (\text{Claudius-Mosotti-Gleichung})$$

$$\Rightarrow \epsilon_r = \frac{3 + 2\alpha N}{3 - \alpha N} = 1 + \frac{\alpha N}{1 - \underbrace{\frac{\alpha N}{3}}_{\text{Lorentz-Feld}}}$$

$$\Rightarrow N = \frac{3(\epsilon_r - 1)}{\alpha(\epsilon_r + 2)}$$

$$\alpha N = \sum_{\forall i} \alpha_i N_i \quad (\text{für Moleküle})$$

Das Lorentz-Feld kann oftmals vernachlässigt werden.

7.1.1 Elektronische Polarisation

Elektronenhülle verschiebt sich aufgrund eines anliegenden elektrischen Feldes.
 → induziertes Dipolmoment.
 Diese Art der Polarisation tritt immer auf und ist temperaturunabhängig.

R : Atomradius, $|\vec{F}_1|$: auslenkende Kraft, Z : Ordnungszahl
 $|\vec{F}_2|$: Coulombkraft der inneren Kugelschale
 x_0 : Auslenkung der Elektronenhülle / des Kerns
 e : Elementarladung

$$\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}_a = 4\pi \epsilon_0 R^3 \vec{E}_a$$

$$\alpha = 4\pi R^3; \quad [\alpha] = m^3$$

$$|\vec{F}_1| = Ze |\vec{E}_a|$$

$$|\vec{F}_2| = \frac{Z^2 e^2 x_0}{4\pi \epsilon_0 R^3}$$

7.1.2 Ionische Polarisation

Positive und negative Ionen werden durch ein äußeres el. Feld gegeneinander verschoben (bei Gitterstruktur).
 → Dipolmoment (temperaturunabhängig)

$\Delta \vec{r}$: zusätzlicher Ionen-Abstand durch Verschiebung
 q : Ladung, \vec{F}_R : Rückstellkraft, \vec{F}_{el} : elektrostatische Kraft
 U : potentielle Energie

$$\vec{p} = \Delta \vec{r} q$$

$$\vec{F}_R = -\vec{F}_{el}$$

$$\left. \frac{\partial U(r)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0$$

$$\vec{F}_R = -grad(U(r)) = -\frac{\partial U(r)}{\partial r}$$

$$F_R(r_0) = 0$$

$$F_R(r_0 + \Delta r) = F_R(r_0) + \left. \frac{\partial F_R}{\partial r} \right|_{r=r_0} \cdot \Delta r + \dots$$

$$= -qE \Leftrightarrow \Delta r = -\frac{qE}{\left. \frac{\partial F_R}{\partial r} \right|_{r=r_0}}$$

7.1.3 Orientierungspolarisation

Permanente Dipole richten sich im äußeren elektrischen Feld (teilweise) aus (temperaturabhängig).

Θ : Winkel zwischen \vec{E} und \vec{p} , T : Temperatur
 W : Wahrscheinlichkeit, einen Dipol mit der Energie U bei der Temperatur T zu finden.
 k_B : Boltzmannkonstante, U : Energie von Dipol
 $L(\nu)$: Langevin-Funktion

$$\vec{P} = N \overline{\vec{p} \cos(\Theta)}$$

$$P \sim \frac{1}{T}$$

$$W(\Theta) = e^{-\frac{U(\Theta)}{k_B T}}$$

$$U(\Theta) = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -p|\vec{E}| \cos(\Theta)$$

$$L(\nu) = \frac{\overline{\cos(\Theta)}}{\overline{W(\Theta) \cos(\Theta)}} = \coth(\nu) - \frac{1}{\nu} \text{ mit } \nu = \frac{p|\vec{E}|}{k_B T}$$

$$\nu \gg 1 : \coth(\nu) \rightarrow 1 \Rightarrow L(\nu) = 1$$

$$\nu \ll 1 : \coth(\nu) \approx \frac{1}{\nu} + \frac{\nu}{3} \Rightarrow L(\nu) = \frac{\nu}{3}$$

7.2 Dielektrizitätskonstante

ϵ_r : komplexe relative Permittivität, ω : Kreisfrequenz
 τ : Relaxationszeit, σ_{Rest} : Restleitfähigkeit

$\epsilon_r = \epsilon(0)$ im statischen Fall

$$\epsilon_r = \epsilon' - j\epsilon'' = |\epsilon_r| e^{-j\delta}$$

$$\epsilon' = \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_{\text{stat}} - \epsilon_\infty}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

$$\epsilon'' = \frac{\epsilon_{\text{stat}} - \epsilon_\infty}{1 + \omega^2 \tau^2} \omega \tau$$

$$\epsilon_{\text{stat}} = \epsilon'(0) > \epsilon_\infty$$

$$\epsilon_\infty = \epsilon(\omega \approx 2\pi \cdot 10^{10} \text{ Hz})$$

$$\tan(\delta) = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{(\epsilon_{\text{stat}} - \epsilon_\infty) \omega \tau}{\omega^2 \tau^2 \epsilon_\infty + \epsilon_{\text{stat}}} \text{ (Verlustfaktor)}$$

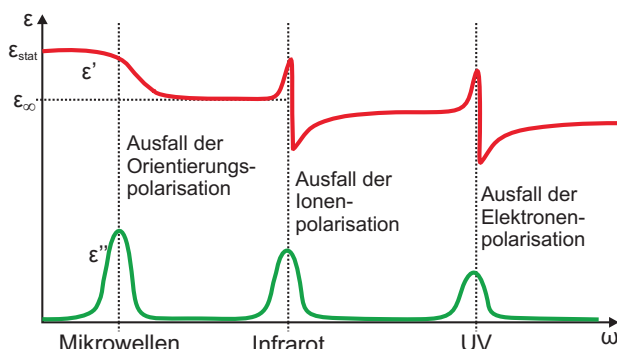
$$\sigma_{\text{Rest}} = \epsilon_0 \epsilon'' \omega$$

Für das Maximum von $\tan(\delta)$ gilt:

$$\tau = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{\epsilon_{\text{stat}}}{\epsilon_\infty}}$$

$$\tan(\delta)_{\text{max}} = \frac{\epsilon_{\text{stat}} - \epsilon_\infty}{2\sqrt{\epsilon_{\text{stat}} \epsilon_\infty}}$$

$$\Rightarrow \epsilon_\infty = \epsilon_{\text{stat}} \left[1 + 2 \tan(\delta)_{\text{max}}^2 - \sqrt{(1 + 2 \tan(\delta)_{\text{max}}^2)^2 - 1} \right]$$



8 Magnetische Eigenschaften von Festkörpern

μ_r : relative Permeabilität, \mathcal{X} : magnetische Suszeptibilität
 J : magnetische Polarisation, \vec{H} : magnetische Feldstärke
 M : Magnetisierung

$$\mathcal{X}^m = \mu_r - 1 = \frac{J}{\mu_0 H} = \frac{M}{H}; \quad [H] = [M] = \frac{A}{m}$$

$$\mathcal{X}^m < 0 \text{ bzw. } \mu_r < 1 \Rightarrow \text{Diamagnetismus}$$

$$\mathcal{X}^m > 0 \text{ bzw. } \mu_r > 1 \Rightarrow \text{Paramagnetismus}$$

$$\mathcal{X}^m \gg 0 \text{ bzw. } \mu_r \gg 1 \Rightarrow \text{Ferromagnetismus}$$

8.1 Elementare magnetische Dipolmomente

g : gyromagn. Verhältnis, S : Gesamtspin
 J : Gesamtdrehimpuls, L : magnetische Quantenzahl

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

$$1 \leq g \leq 2$$

$$S = 0 \rightarrow g = 1$$

$$L = 0 \rightarrow g = 2$$

8.2 Diamagnetismus

= Auftreten eines zusätzlichen magnetischen Momentes der Elektronenhülle von Atomen unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes.

Der Diamagnetismus ist temperaturunabhängig und tritt immer auf, wird allerdings vom Para- und Ferromagnetismus überlagert.

\vec{m} : magnetisches Moment, N : Atomdichte
 \bar{r}^2 : Erwartungswert des effektiven Bahnradius
 Z^* : effektive Kernladungszahl (Anzahl der Elektronen auf der äußersten Schale abzüglich der Leitungselektronen)

$$\mathcal{X}_{\text{dia}}^m = \frac{\vec{M}}{\vec{H}} = \frac{N \vec{m}}{\vec{H}} = -\frac{N Z^* e^2 \bar{r}^2 \mu_0}{6 m_0}$$

8.3 Paramagnetismus

Ist temperaturabhängig und tritt bei Molekülen bzw. Atomen mit magnetischem Dipolmoment auf, d.h. wenn die Elektronenschalen nicht abgeschlossen sind.

μ_B : Bohrsches Magneton, k_B : Boltzmannkonstante
 M_{para} : paramagn. Magnetisierung, C : Curie-Konstante

$$C = \frac{N g^2 J(J+1) \mu_B^2 \mu_0}{3 k_B}$$

$$\mathcal{X}_{\text{para}}^m = \frac{C}{T}$$

$$M_{\text{para}} = \mathcal{X}_{\text{para}}^m H$$

8.4 Ferromagnetismus

Ferromagnetismus tritt nur bis zur Curie-Temperatur auf (danach Paramagnetismus).

Θ : Curie-Temperatur, T : Temperatur

$$\chi^m = \frac{C}{T - \Theta}$$

Oberhalb der Curie-Temperatur tragen folgende Dinge zur magnetischen Suszeptibilität bei:

- Diamagnetismus der Atomhüllen
- Beitrag der Leitungselektronen (netto paramagnetisch)
- Paramagnetismus der Atomrümpfe

Der dominante Beitrag ist i.A. der Paramagnetismus.

8.5 Leitungselektronen

n : Elektronendichte, T_F : Fermitemperatur

$$\chi_{para}^m = \frac{3n\mu_0\mu_B^2}{2k_B T_F}$$

$$\chi_{dia}^m = -\frac{1}{3}\chi_{para}^m$$

$$\chi^m = \chi_{para}^m + \chi_{dia}^m = \frac{n\mu_B^2\mu_0}{k_B T_F}$$

9 Physikalische Konstanten

Atomare Masseneinheit	$u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Avogadro-Konstante	$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$
Elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$
Elektron Ruhemasse	$m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Elementarladung	$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Magnetische Feldkonstante	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$
Bohrsches Magneton	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_0} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2$
Plancksches Wirkungsquantum	$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
Rydberg-Konstante	$R_\infty = 1,0974 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{m}}$
Rydberg-Konstante	$R_H = 1,0968 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{m}}$
Boltzmannkonstante	$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$
Gaskonstante	$R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{Kmol}}$

Lizenz: CC BY-NC-SA 3.0

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/>